UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. B. Beckert
M. Ulbrich

Formale Systeme, WS 2008/2009

Lösungen zum Übungsblatt 7

Dieses Blatt wurde in der Übung am 9.1.2009 besprochen.

Zu Aufgabe 1

Betrachte $\phi = (\forall x(p(x) \vee q(x))) \to (p(a) \vee q(b))$.

Tableau für $\neg\phi$:

$$
\begin{array}{cccc}
 & 0\phi & & (0) \\
 & | & & \\
 & 1\forall x(p(x) \vee q(x)) & & (1)\ [\alpha(0)] \\
 & | & & \\
 & 0(p(a) \vee q(b)) & & (2)\ [\alpha(0)] \\
 & | & & \\
 & 0p(a) & & (3)\ [\alpha(2)] \\
 & | & & \\
 & 0q(b) & & (4)\ [\alpha(2)] \\
 & | & & \\
 & 1p(X) \vee q(X) & & (5)\ [\gamma(1)] \\
 & \swarrow \qquad \searrow & & \\
(6)\ [\beta(5)]\quad 1p(X) & & 1q(X)\quad (7)\ [\beta(5)] &
\end{array}
$$

Der linke Ast kann nun durch die Substitution X/a geschlossen werden. Wird diese nur lokal (d.h. auf dem Ast) angewendet, kann der rechte Ast durch X/b geschlossen werden.

Die Formel ϕ ist aber nicht allgemeingültig, wie folgende (Herbrand-)Interpretation (D, I) beweist:

$$
\begin{aligned}
D &= \{a, b\} \\
I(p) &= \{b\} \\
I(q) &= \{a\}
\end{aligned}
$$

Es gilt $\mathrm{val}_I(\forall x(p(x) \vee q(x))) = W$ aber $\mathrm{val}_I(p(a)) = F$ und $\mathrm{val}_I(q(b)) = F$

Zu Aufgabe 2

val bezeichne im Folgenden die Auswertung bzgl. einer beliebig aber fest gewählten Interpretation (und Variablenbelegung).

(a) Sei $\phi' = \phi[\psi \leftarrow \mathbf{1}]$. Zu zeigen ist:

$$\mathrm{val}(\bigwedge \Gamma \wedge \psi \to \phi' \vee \bigvee \Delta) = \mathrm{val}(\bigwedge \Gamma \wedge \psi \to \phi \vee \bigvee \Delta)$$

Beide Seiten evaluieren zu W, wenn eine Formel aus $\Gamma \cup \{\psi\}$ zu F evaluiert. Sei also $\mathrm{val}(\psi) = \mathrm{val}(\gamma) = W$ für alle $\gamma \in \Gamma$. Wenn eine Formel $\delta \in \Delta$ zu W evaluiert, sind wieder beide Seiten der obigen Gleichung W. Sei also $\mathrm{val}(\delta) = F$ für alle $\delta \in \Delta$.

Das ist nun der entscheidende Punkt, an dem sich beide Sequenzen unterscheiden können. Wir wissen bereits, dass $\mathrm{val}(\psi) = W = \mathrm{val}(\mathbf{1})$. Mittels einfacher struktureller Induktion (hier nicht ausgeführt) kann man nun zeigen, dass alle Unterformeln von ϕ und ϕ' (insbesondere ψ und $\mathbf{1}$) identisch ausgewertet werden. □

(b) Sei ϕ eine beliebige Formel. Zu zeigen ist:

[1] $\mathrm{val}(\bigwedge \Gamma \wedge \phi \rightarrow \bigvee \Delta) = W$ und
[2] $\mathrm{val}(\bigwedge \Gamma \rightarrow \phi \vee \bigvee \Delta) = W$ gdw. [3] $\mathrm{val}(\underbrace{\bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta}_{:=\sigma}) = W$

Wir machen eine Fallunterscheidung nach $\mathrm{val}(\phi)$:

Sei zunächst $\mathrm{val}(\phi) = W$. Dann ist [2] sicher erfüllt. [1] wird ausgewertet wie [3], weil W bzgl. „und“ neutral ist. Wenn $\mathrm{val}(\phi) = F$ ist, dann ist [1] sicher erfüllt („ex falso quod libet“). [2] wird ausgewertet wie [3], weil F neutral ist für „oder“.

Das bedeutet, das unabhägig davon, wie ϕ ausgewertet wird, immer eine Sequenz der Prämisse genauso wie die Conclusio ausgewertet wird. □

Zu Aufgabe 3

(a) Diese Lösung steht in Form der KeY-Beweisdatei `auf3.key.proof` auf den Vorlesungsseiten zur Verfügung.

(b) Eine Interpretation von Σ_N, die diese Aussage nicht erfüllt, ist z.B. (D_2, I_2):

$$D_2 = \{a, b, c\},\ I_2(s)(a) = I_2(s)(b) = I_2(s)(c) = I_2(O) = a,\ I_2(+)(x, y) = \begin{cases} b & \text{wenn } (x, y) = (b, c) \\ c & \text{wenn } (x, y) = (c, b) \\ a & \text{sonst} \end{cases}$$

Offensichtlich ist $c +_{I_2} b = b +_{I_2} c$ hier nicht erfüllt. Aber sind die Vorbedingungen erfüllt?

Ja. Es gilt schließlich für eine bel. Var-Belegung β, dass $\mathrm{val}_{I_2,\beta}(x + s(y)) = \beta(x) +_{I_2} I_2(s)(\beta(y)) = \beta(x) +_{I_2} a = a = \mathrm{val}_{I_2,\beta}(s(x + y))$. Analog für $\mathrm{val}_{I_2,\beta}(s(x) + y) = \mathrm{val}_{I_2,\beta}(s(x + y))$.