Formale Systeme

Prof. Dr. Bernhard Beckert

Fakultät für Informatik
Universität Karlsruhe (TH)

Winter 2008/2009

Hilbertkalkül

Axiome und Regeln

Axiome sind Schemata! x steht für eine Variable, t für einen Term, A, B, C stehen für Formeln.

Ax1:	$A \to (B \to A)$		(Abschwächung)
Ax2:	$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$		(Verteilung von $\to$)
Ax3:	$(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$		(Kontraposition)
Ax4:	$\forall x A \to \{x/t\}(A)$	$\{x/t\}$ kollisionsfrei für A	(Instantiierung)
Ax5:	$\forall x(A \to B) \to (A \to \forall x B)$	$x \notin Frei(A)$	($\forall$-Verschiebung)

Mp: $\dfrac{A, A \to B}{B}$ (Modus ponens)

Gen: $\dfrac{A}{\forall x A}$ (Generalisierung)

Vollständigkeit der PL1
GÖDEL1931

Theorem

Σ sei eine Signatur der PL1.
Dann ist **H** *über Σ korrekt und vollständig: für alle $M \subseteq For_{\Sigma}$, $A \in For_{\Sigma}$ gilt:*

$$M \models A \Longleftrightarrow M \vdash_{\mathbf{H}} A$$

Konsequenzen der Korrektheit und Vollständigkeit

Theorem (Kompaktheitssatz)

Für beliebige $M \subseteq For_\Sigma$, $A \in For_\Sigma$ gilt:

$$M \models A$$
$$\Leftrightarrow$$
$$E \models A \text{ für eine endliche Teilmenge } E \subseteq M.$$

Theorem (Endlichkeitssatz)

Eine Menge $M \subseteq For_\Sigma$ hat genau dann ein Modell, wenn jede endliche Teilmenge von M ein Modell hat.

Der Endlichkeitssatz ist der Spezialfall $A = \mathbf{0}$
des Kompaktheitssatzes.

Beweis des Kompaktheitsatzes

$$\begin{array}{llcll}
 & M & \models & A & \\
\Leftrightarrow & M & \vdash & A & \text{(Korrektheit und Vollständigkeit)} \\
\Leftrightarrow & E & \vdash & A & \text{für ein endliches } E \subseteq M \\
 & & & & \quad \text{Endlichkeit von Ableitungen} \\
\Leftrightarrow & E & \models & A & \text{für ein endliches } E \subseteq M \\
 & & & & \\
 & & & & \text{Korrektheit u. Vollständigkeit}
\end{array}$$

Grenzen der Prädikatenlogik erster Stufe

Theorem

Es gibt keine Formel F der Prädikatenlogik erster Stufe, so daß für alle Strukturen $\mathcal{M}$ gilt:

$$\mathcal{M} \models F \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M} \text{ ist endlich.}$$

Grenzen der Prädikatenlogik erster Stufe

Theorem

Es gibt keine Formel F der Prädikatenlogik erster Stufe, so daß für alle Strukturen $\mathcal{M}$ gilt:

$$\mathcal{M} \models F \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M} \textit{ ist endlich.}$$

Beweis: Angenommen ein solches F existiert.
Wir definieren Hilfsformeln: $A_n = \exists x_1 \ldots \exists x_n \bigwedge_{i<j\leq n} \neg(x_i \doteq x_j)$

Offensichtlich gilt $\quad \mathcal{M} \models A_n \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M}$ hat mindestens n Elemente.
Jede endliche Teilmenge von

$$\Gamma = \{F\} \cup \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

ist erfüllbar, aber Γ selbst ist nicht erfüllbar.
Widerspruch zum Endlichkeitssatz!