

Formale Systeme

Prof. Dr. Bernhard Beckert

Fakultät für Informatik
Universität Karlsruhe (TH)



Winter 2008/2009



Bedeutung von Formeln

Ist die Formel

$$q(x) \rightarrow \exists y(in(y, x) \wedge kl(y)),$$

wahr?



Bedeutung von Formeln

Ist die Formel

$$q(x) \rightarrow \exists y(in(y, x) \wedge kl(y)),$$

wahr?

Die Signatur $\Sigma = \{k(), q(), d(), kl(), gr(), in(,)\}$ liegt fest.



Bedeutung von Formeln

Ist die Formel

$$q(x) \rightarrow \exists y(in(y, x) \wedge kl(y)),$$

wahr?

Die Signatur $\Sigma = \{k(), q(), d(), kl(), gr(), in(,)\}$ liegt fest.

Die Wahrheit ist abhängig von



Bedeutung von Formeln

Ist die Formel

$$q(x) \rightarrow \exists y(in(y, x) \wedge kl(y)),$$

wahr?

Die Signatur $\Sigma = \{k(), q(), d(), kl(), gr(), in(,)\}$ liegt fest.

Die Wahrheit ist abhängig von

- einer Interpretation (\mathcal{D}, I)



Bedeutung von Formeln

Ist die Formel

$$q(x) \rightarrow \exists y(in(y, x) \wedge kl(y)),$$

wahr?

Die Signatur $\Sigma = \{k(), q(), d(), kl(), gr(), in(,)\}$ liegt fest.

Die Wahrheit ist abhängig von

- einer Interpretation (\mathcal{D}, I)
- einer Variablenbelegung β



Interpretation

Definition

Es sei Σ eine Signatur der PL1.

Eine *Interpretation* \mathcal{D} von Σ ist ein Paar (D, I) mit

1. D ist eine beliebige, nichtleere Menge



Interpretation

Definition

Es sei Σ eine Signatur der PL1.

Eine *Interpretation* \mathcal{D} von Σ ist ein Paar (D, I) mit

1. D ist eine beliebige, nichtleere Menge
2. I ist eine Abbildung der Signatursymbole, die



Interpretation

Definition

Es sei Σ eine Signatur der PL1.

Eine *Interpretation* \mathcal{D} von Σ ist ein Paar (D, I) mit

1. D ist eine beliebige, nichtleere Menge
2. I ist eine Abbildung der Signatursymbole, die
 - jeder Konstanten c ein Element $I(c) \in D$



Interpretation

Definition

Es sei Σ eine Signatur der PL1.

Eine *Interpretation* \mathcal{D} von Σ ist ein Paar (D, I) mit

1. D ist eine beliebige, nichtleere Menge
2. I ist eine Abbildung der Signatursymbole, die
 - jeder Konstanten c ein Element $I(c) \in D$
 - für $n \geq 1$: jedem n -stelligen Funktionssymbol f eine Funktion $I(f) : D^n \rightarrow D$



Interpretation

Definition

Es sei Σ eine Signatur der PL1.

Eine *Interpretation* \mathcal{D} von Σ ist ein Paar (D, I) mit

1. D ist eine beliebige, nichtleere Menge
2. I ist eine Abbildung der Signatursymbole, die
 - jeder Konstanten c ein Element $I(c) \in D$
 - für $n \geq 1$: jedem n -stelligen Funktionssymbol f eine Funktion $I(f) : D^n \rightarrow D$
 - jedem 0-stelligen Prädikatsymbol P einen Wahrheitswert $I(P) \in \{W, F\}$



Interpretation

Definition

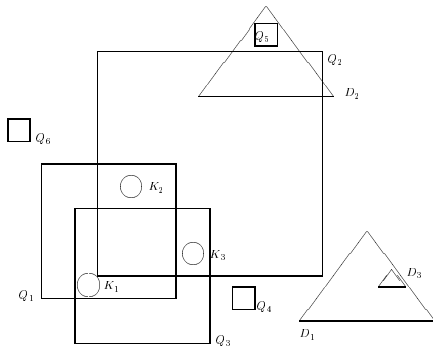
Es sei Σ eine Signatur der PL1.

Eine *Interpretation* \mathcal{D} von Σ ist ein Paar (D, I) mit

1. D ist eine beliebige, nichtleere Menge
2. I ist eine Abbildung der Signatursymbole, die
 - jeder Konstanten c ein Element $I(c) \in D$
 - für $n \geq 1$: jedem n -stelligen Funktionssymbol f eine Funktion $I(f) : D^n \rightarrow D$
 - jedem 0-stelligen Prädikatsymbol P einen Wahrheitswert $I(P) \in \{W, F\}$
 - für $n \geq 1$: jedem n -stelligen Prädikatsymbol p eine n -stellige Relation $I(p) \subseteq D^n$ zuordnet.



Beispiel einer Interpretation (Tarski's World)



$P_{\Sigma} = \{k(), q(), d(), kl(), gr(), in(), \}\ D_{Bsp} = \{Q_i : 1 \leq i \leq 6\} \cup \{K_1, K_2, K_3, D_1, D_2, D_3\}$

$I_{Bsp}(q) = \{Q_i : 1 \leq i \leq 6\}$

$I_{Bsp}(k) = \{K_1, K_2, K_3\}, I_{Bsp}(d) = \{D_1, D_2, D_3\}$

$I_{Bsp}(in) = \{(K_1, Q_1), (K_1, Q_3), (K_2, Q_1), (K_2, Q_2), (K_3, Q_2), (K_3, Q_3), (D_3, D_1), (Q_5, D_2)\}$



Variablenbelegung

Definition

Es sei (D, I) eine Interpretation von Σ .

Eine *Variablenbelegung* (oder kurz *Belegung* über D) ist eine Funktion

$$\beta : \text{Var} \rightarrow D.$$

Zu β , $x \in \text{Var}$ und $d \in D$ definieren wir die *Modifikation* von β an der Stelle x zu d :

$$\beta_x^d(y) = \begin{cases} d & \text{falls } y = x \\ \beta(y) & \text{falls } y \neq x \end{cases}$$



Auswertung von Termen

Definition

Es sei (D, I) eine Interpretation von Σ und β eine Variablenbelegung über D .

Wir definieren eine Funktion $val_{D,I,\beta}$, mit

$$val_{D,I,\beta}(t) \in D \text{ für } t \in Term_{\Sigma}$$

$$val_{D,I,\beta}(A) \in \{W, F\} \text{ für } A \in For_{\Sigma}$$

$val_{D,I,\beta}$ auf $Term_{\Sigma}$:

$$val_{D,I,\beta}(x) = \beta(x) \text{ für } x \in Var$$

$$val_{D,I,\beta}(f(t_1, \dots, t_n)) = (I(f))(val_{D,I,\beta}(t_1), \dots, val_{D,I,\beta}(t_n))$$



Auswertung von Formeln

Definition

1. $val_{D,I,\beta}(\mathbf{1}) = W$

$$val_{D,I,\beta}(\mathbf{0}) = F$$

$$val_{D,I,\beta}(s \doteq t) := \begin{cases} W & \text{falls } val_{D,I,\beta}(s) = val_{D,I,\beta}(t) \\ F & \text{sonst} \end{cases}$$

$$val_{D,I,\beta}(P) := I(P) \text{ f\u00fcr 0-stellige Pr\u00e4dikate } P$$

$$val_{D,I,\beta}(p(t_1, \dots, t_n)) :=$$

$$\begin{cases} W & \text{falls } (val_{D,I,\beta}(t_1), \dots, val_{D,I,\beta}(t_n)) \in I(p) \\ F & \text{sonst} \end{cases}$$



Auswertung von Formeln

Definition

2. $val_{D,I,\beta}(X)$ für $X \in \{\neg A, A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B, A \leftrightarrow B\}$ wie in der Aussagenlogik.

Ferner:

$$val_{D,I,\beta}(\forall xA) :=$$

$$\begin{cases} W & \text{falls für alle } d \in D : val_{D,I,\beta_x^d}(A) = W \\ F & \text{sonst} \end{cases}$$

$$val_{D,I,\beta}(\exists xA) :=$$

$$\begin{cases} W & \text{falls ein } d \in D \text{ existiert mit } val_{D,I,\beta_x^d}(A) = W \\ F & \text{sonst} \end{cases}$$



Beispiel

Wir wollen die Formel

$$q(x) \rightarrow \exists y(in(y, x) \wedge kl(y)),$$

in der Interpretation $(\mathcal{D}_{Bsp}, I_{Bsp})$ aus der Abbildung mit der Variablenbelegung $\beta(x) = Q1$ auswerten.



Beispiel

Wir wollen die Formel

$$q(x) \rightarrow \exists y(in(y, x) \wedge kl(y)),$$

in der Interpretation $(\mathcal{D}_{Bsp}, I_{Bsp})$ aus der Abbildung mit der Variablenbelegung $\beta(x) = Q1$ auswerten.

Formel links von \rightarrow

$$val_{\mathcal{D}_{Bsp}, \beta}(x) = Q1 \in I(q), \text{ also } val_{\mathcal{D}_{Bsp}, \beta}(q(x)) = W.$$



Beispiel

Wir wollen die Formel

$$q(x) \rightarrow \exists y(in(y, x) \wedge kl(y)),$$

in der Interpretation $(\mathcal{D}_{Bsp}, I_{Bsp})$ aus der Abbildung mit der Variablenbelegung $\beta(x) = Q1$ auswerten.

Formel links von \rightarrow

$$val_{\mathcal{D}_{Bsp}, \beta}(x) = Q1 \in I(q), \text{ also } val_{\mathcal{D}_{Bsp}, \beta}(q(x)) = W.$$

Formel rechts von \rightarrow

$$val_{\mathcal{D}_{Bsp}, \beta}(\exists y(in(y, x) \wedge kl(y))) = W$$



Beispiel

Wir wollen die Formel

$$q(x) \rightarrow \exists y(in(y, x) \wedge kl(y)),$$

in der Interpretation $(\mathcal{D}_{Bsp}, I_{Bsp})$ aus der Abbildung mit der Variablenbelegung $\beta(x) = Q1$ auswerten.

Formel links von \rightarrow

$$val_{\mathcal{D}_{Bsp}, \beta}(x) = Q1 \in I(q), \text{ also } val_{\mathcal{D}_{Bsp}, \beta}(q(x)) = W.$$

Formel rechts von \rightarrow

$$val_{\mathcal{D}_{Bsp}, \beta}(\exists y(in(y, x) \wedge kl(y))) = W$$

Wähle K_1 als Belegung für y .



Beispiel

Fortsetzung

Die weitere Auswertung führt zu

$$\text{val}_{\mathcal{D}_{Bsp}, \beta_y^{K_1}} ((in(y, x) \wedge kl(y))) = W$$

weil $(K_1, Q_1) \in I_{Bsp}(in)$ und $K_1 \in I_{Bsp}(kl)$



Beispiel

Fortsetzung

Die weitere Auswertung führt zu

$$\text{val}_{\mathcal{D}_{Bsp}, \beta}^{K_1} ((in(y, x) \wedge kl(y))) = W$$

weil $(K_1, Q_1) \in I_{Bsp}(in)$ und $K_1 \in I_{Bsp}(kl)$

Insgesamt

$$\text{val}_{\mathcal{D}_{Bsp}, \beta} (q(x) \rightarrow \exists y (in(y, x) \wedge kl(y))) = W$$



Arithmetische Strukturen

Signatur $\Sigma_{arith} = \{+, *, \leq\}$



Arithmetische Strukturen

Signatur $\Sigma_{arith} = \{+, *, \leq\}$

Die mathematischen ganzen Zahlen

$$\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, +_{\mathcal{Z}}, *_{\mathcal{Z}}, \leq_{\mathcal{Z}}).$$



Arithmetische Strukturen

Signatur $\Sigma_{arith} = \{+, *, \leq\}$

Die mathematischen ganzen Zahlen

$$\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, +_{\mathcal{Z}}, *_{\mathcal{Z}}, \leq_{\mathcal{Z}}).$$

Die ganzen Zahlen in Java

$$\mathcal{Z}_{Jint} = (\mathbb{Z}_{Jint}, +_{Jint}, *_{Jint}, \leq_{Jint}).$$

wobei:

$$\mathbb{Z}_{Jint} = [\text{minInt}, \text{maxInt}] = [-2147483648, 2147483647]$$

$$n +_{Jint} m = \text{nächste Folie}$$

$$n *_{Jint} m = \text{nächste Folie}$$

$$n \leq_{Jint} m \Leftrightarrow n \leq_{\mathcal{Z}} m$$



Java Arithmetik

Für $n, m \in [\text{minInt}, \text{maxInt}]$ gilt

$$n +_{\text{Jint}} m = \begin{cases} n +_Z m & \text{falls } n +_Z m \in [\text{minInt}, \text{maxInt}] \\ \text{minInt} -_Z 1 +_Z ((n +_Z m) -_Z \text{maxInt}) & \text{falls } n +_Z m > \text{maxInt} \\ \text{maxInt} + 1 + ((n +_Z m) - \text{minInt}) & \text{falls } n +_Z m < \text{minInt} \end{cases}$$

Z.B.

$$\text{maxInt} +_{\text{Jint}} 1 = \text{minInt} \text{ und } \text{minInt} -_{\text{Jint}} 1 = \text{maxInt}$$

Entsprechend für $*_{\text{Jint}}$.



Vergleich von \mathcal{Z} und \mathcal{Z}_{jint}

Formel ϕ	$\mathcal{Z} \models \phi$	$\mathcal{Z}_{jint} \models \phi$
$\forall x \exists y (x < y)$		
$\forall x \forall y ((x + 1) * y = x * y + y)$		
$\exists x (0 < x \wedge x + 1 < 0)$		



Vergleich von \mathcal{Z} und \mathcal{Z}_{jint}

Formel ϕ	$\mathcal{Z} \models \phi$	$\mathcal{Z}_{jint} \models \phi$
$\forall x \exists y (x < y)$	ja	
$\forall x \forall y ((x + 1) * y = x * y + y)$		
$\exists x (0 < x \wedge x + 1 < 0)$		



Vergleich von \mathcal{Z} und \mathcal{Z}_{jint}

Formel ϕ	$\mathcal{Z} \models \phi$	$\mathcal{Z}_{jint} \models \phi$
$\forall x \exists y (x < y)$	ja	nein
$\forall x \forall y ((x + 1) * y = x * y + y)$		
$\exists x (0 < x \wedge x + 1 < 0)$		



Vergleich von \mathcal{Z} und \mathcal{Z}_{jint}

Formel ϕ	$\mathcal{Z} \models \phi$	$\mathcal{Z}_{jint} \models \phi$
$\forall x \exists y (x < y)$	ja	nein
$\forall x \forall y ((x + 1) * y = x * y + y)$	ja	
$\exists x (0 < x \wedge x + 1 < 0)$		



Vergleich von \mathcal{Z} und \mathcal{Z}_{jint}

Formel ϕ	$\mathcal{Z} \models \phi$	$\mathcal{Z}_{jint} \models \phi$
$\forall x \exists y (x < y)$	ja	nein
$\forall x \forall y ((x + 1) * y = x * y + y)$	ja	ja
$\exists x (0 < x \wedge x + 1 < 0)$		



Vergleich von \mathcal{Z} und \mathcal{Z}_{jint}

Formel ϕ	$\mathcal{Z} \models \phi$	$\mathcal{Z}_{jint} \models \phi$
$\forall x \exists y (x < y)$	ja	nein
$\forall x \forall y ((x + 1) * y = x * y + y)$	ja	ja
$\exists x (0 < x \wedge x + 1 < 0)$	nein	



Vergleich von \mathcal{Z} und \mathcal{Z}_{jint}

Formel ϕ	$\mathcal{Z} \models \phi$	$\mathcal{Z}_{jint} \models \phi$
$\forall x \exists y (x < y)$	ja	nein
$\forall x \forall y ((x + 1) * y = x * y + y)$	ja	ja
$\exists x (0 < x \wedge x + 1 < 0)$	nein	ja



Koinzidenzlemma

Theorem

\mathcal{D} sei Interpretation, β, γ Variablenbelegungen

1. Gilt für den Term t $\beta(x) = \gamma(x)$ für alle $x \in \text{Var}(t)$, dann $\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(t) = \text{val}_{\mathcal{D},\gamma}(t)$.



Koinzidenzlemma

Theorem

\mathcal{D} sei Interpretation, β, γ Variablenbelegungen

1. Gilt für den Term t $\beta(x) = \gamma(x)$ für alle $x \in \text{Var}(t)$, dann $\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(t) = \text{val}_{\mathcal{D},\gamma}(t)$.
2. Gilt für die Formel A $\beta(x) = \gamma(x)$ für alle $x \in \text{Frei}(A)$, dann $\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(A) = \text{val}_{\mathcal{D},\gamma}(A)$.



Koinzidenzlemma

Theorem

\mathcal{D} sei Interpretation, β, γ Variablenbelegungen

1. Gilt für den Term t $\beta(x) = \gamma(x)$ für alle $x \in \text{Var}(t)$, dann $\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(t) = \text{val}_{\mathcal{D},\gamma}(t)$.
2. Gilt für die Formel A $\beta(x) = \gamma(x)$ für alle $x \in \text{Frei}(A)$, dann $\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(A) = \text{val}_{\mathcal{D},\gamma}(A)$.
3. Ist $A \in \text{For}_{\Sigma}$ geschlossen, dann gilt $\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(A) = \text{val}_{\mathcal{D},\gamma}(A)$



Koinzidenzlemma

Theorem

\mathcal{D} sei Interpretation, β, γ Variablenbelegungen

1. Gilt für den Term t $\beta(x) = \gamma(x)$ für alle $x \in \text{Var}(t)$, dann $\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(t) = \text{val}_{\mathcal{D},\gamma}(t)$.
2. Gilt für die Formel A $\beta(x) = \gamma(x)$ für alle $x \in \text{Frei}(A)$, dann $\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(A) = \text{val}_{\mathcal{D},\gamma}(A)$.
3. Ist $A \in \text{For}_{\Sigma}$ geschlossen, dann gilt $\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(A) = \text{val}_{\mathcal{D},\gamma}(A)$

Beweis: Durch strukturelle Induktion unter Ausnutzung der Definition von *val*.



Substitutionslemma für Terme

Theorem

Σ sei eine Signatur, \mathcal{D} eine Interpretation für Σ ,
 β eine Belegung, σ eine Substitution und $t \in \text{Term}_\Sigma$.

Dann gilt

$$\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(t)) = \text{val}_{\mathcal{D},\beta'}(t).$$

wobei

$$\beta'(x) = \text{val}_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(x))$$

für alle $x \in \text{Var}$.



Beweis

Strukturelle Induktion nach t .



Beweis

Induktionsanfang

Strukturelle Induktion nach t .

$t = x \in \text{Var}$:

$$\begin{aligned} \text{val}_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(x)) &= \beta'(x) && \text{Def. von } \beta' \\ &= \text{val}_{\mathcal{D},\beta'}(x) && \text{Def. von } \text{val}(x) \end{aligned}$$



Beweis
Induktionsschritt

$$\begin{aligned} t = f(t_1, \dots, t_n): \\ \text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(\sigma(f(t_1, \dots, t_n))) = \\ = \text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(f(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n))) \end{aligned}$$



Beweis
Induktionsschritt

$$\begin{aligned} & t = f(t_1, \dots, t_n): \\ \text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(\sigma(f(t_1, \dots, t_n))) &= \\ &= \text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(f(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n))) \end{aligned}$$



Beweis

Induktionsschritt

$$\begin{aligned} & t = f(t_1, \dots, t_n): \\ \text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(\sigma(f(t_1, \dots, t_n))) &= \\ &= \text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(f(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n))) \\ &= l(f)(\text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(\sigma(t_1)), \dots, \text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(\sigma(t_n))) \end{aligned}$$



Beweis

Induktionsschritt

$$\begin{aligned} & t = f(t_1, \dots, t_n): \\ \text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(\sigma(f(t_1, \dots, t_n))) &= \\ &= \text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(f(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n))) \\ &= l(f)(\text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(\sigma(t_1)), \dots, \text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(\sigma(t_n))) \end{aligned}$$



Beweis

Induktionsschritt

$$\begin{aligned} & t = f(t_1, \dots, t_n): \\ \text{val}_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(f(t_1, \dots, t_n))) &= \\ &= \text{val}_{\mathcal{D},\beta}(f(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n))) \\ &= l(f)(\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(t_1)), \dots, \text{val}_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(t_n))) \\ &= l(f)(\text{val}_{\mathcal{D},\beta'}(t_1), \dots, \text{val}_{\mathcal{D},\beta'}(t_n)) \\ & \quad \text{(nach Induktionsannahme)} \end{aligned}$$



Beweis
Induktionsschritt

$$\begin{aligned} & t = f(t_1, \dots, t_n): \\ \text{val}_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(f(t_1, \dots, t_n))) &= \\ &= \text{val}_{\mathcal{D},\beta}(f(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n))) \\ &= l(f)(\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(t_1)), \dots, \text{val}_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(t_n))) \\ &= l(f)(\text{val}_{\mathcal{D},\beta'}(t_1), \dots, \text{val}_{\mathcal{D},\beta'}(t_n)) \\ & \quad (\text{nach Induktionsannahme}) \end{aligned}$$



Beweis

Induktionsschritt

$$\begin{aligned} & t = f(t_1, \dots, t_n): \\ \text{val}_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(f(t_1, \dots, t_n))) &= \\ &= \text{val}_{\mathcal{D},\beta}(f(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n))) \\ &= l(f)(\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(t_1)), \dots, \text{val}_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(t_n))) \\ &= l(f)(\text{val}_{\mathcal{D},\beta'}(t_1), \dots, \text{val}_{\mathcal{D},\beta'}(t_n)) \\ &\quad \text{(nach Induktionsannahme)} \\ &= \text{val}_{\mathcal{D},\beta'}(f(t_1, \dots, t_n)). \end{aligned}$$



Quiz

Kollisionsfreie Substitutionen

Es bezeichne F die Formel

$$p(x, z) \wedge \exists y(p(x, y) \wedge p(z, y) \rightarrow p(x, y))$$

Welche der folgenden Substitutionen ist kollisionsfrei für F ?

$$\sigma_1 \quad \{x/a, z/b\}$$

$$\sigma_2 \quad \{x/(x+z), z/(x+z)\}$$

$$\sigma_3 \quad \{x/(x+y), z/a\}$$

$$\sigma_4 \quad \{x/y\}$$

$$\sigma_5 \quad \{x/z\}$$



Quiz

Kollisionsfreie Substitutionen

Es bezeichne F die Formel

$$p(x, z) \wedge \exists y(p(x, y) \wedge p(z, y) \rightarrow p(x, y))$$

Welche der folgenden Substitutionen ist kollisionsfrei für F ?

- | | | |
|------------|------------------------|-----------------------|
| σ_1 | $\{x/a, z/b\}$ | <i>kollisionsfrei</i> |
| σ_2 | $\{x/(x+z), z/(x+z)\}$ | <i>kollisionsfrei</i> |
| σ_3 | $\{x/(x+y), z/a\}$ | Kollision |
| σ_4 | $\{x/y\}$ | Kollision |
| σ_5 | $\{x/z\}$ | <i>kollisionsfrei</i> |



Substitutionslemma für Formeln

Theorem

Σ sei eine Signatur, \mathcal{D} eine Interpretation für Σ ,
 β eine Belegung, $A \in \text{For}_\Sigma$ und
 σ eine für A **kollisionsfreie** Substitution.

Dann gilt:

$$\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(A)) = \text{val}_{\mathcal{D},\beta'}(A),$$

wobei

$$\beta'(x) = \text{val}_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(x))$$

für alle $x \in \text{Var}$.



Beweis

Induktion nach A .

Exemplarisch: Schritt von A nach $\exists xA$.

Notation: val_β abkürzend für $val_{\mathcal{D},\beta}$.

Außerdem: $\sigma_x(x) = x$, $\sigma_x(y) = \sigma(y)$ für $y \neq x$.



Beweis

Induktion nach A .

Exemplarisch: Schritt von A nach $\exists xA$.

Notation: val_β abkürzend für $val_{\mathcal{D},\beta}$.

Außerdem: $\sigma_x(x) = x$, $\sigma_x(y) = \sigma(y)$ für $y \neq x$.

$$val_\beta(\sigma(\exists xA)) = W \quad \text{gdw} \quad val_\beta(\exists x\sigma_x(A)) = W$$

Anwendung von σ



Beweis

Induktion nach A .

Exemplarisch: Schritt von A nach $\exists xA$.

Notation: val_β abkürzend für $val_{\mathcal{D},\beta}$.

Außerdem: $\sigma_x(x) = x$, $\sigma_x(y) = \sigma(y)$ für $y \neq x$.

$$\begin{aligned} val_\beta(\sigma(\exists xA)) = W & \quad \text{gdw} \quad val_\beta(\exists x\sigma_x(A)) = W \\ & \quad \text{Anwendung von } \sigma \\ & \quad \text{gdw} \quad val_{\beta_x^d}(\sigma_x(A)) = W \text{ für ein } d \in D \\ & \quad \text{Def. von } val \end{aligned}$$



Beweis

Induktion nach A .

Exemplarisch: Schritt von A nach $\exists xA$.

Notation: val_β abkürzend für $val_{\mathcal{D},\beta}$.

Außerdem: $\sigma_x(x) = x$, $\sigma_x(y) = \sigma(y)$ für $y \neq x$.

$$\begin{aligned} val_\beta(\sigma(\exists xA)) = W & \quad \text{gdw} \quad val_\beta(\exists x\sigma_x(A)) = W \\ & \quad \text{Anwendung von } \sigma \\ & \quad \text{gdw} \quad val_{\beta_x^d}(\sigma_x(A)) = W \text{ für ein } d \in D \\ & \quad \text{Def. von } val \\ & \quad \text{gdw} \quad val_{(\beta_x^d)''}(A) = W \quad \text{Ind.Vor} \\ & \quad \text{wo } (\beta_x^d)''(y) = val_{\beta_x^d}(\sigma_x(y)) \text{ für all } y. \end{aligned}$$



Beweis

Induktion nach A .

Exemplarisch: Schritt von A nach $\exists xA$.

Notation: val_β abkürzend für $val_{\mathcal{D},\beta}$.

Außerdem: $\sigma_x(x) = x$, $\sigma_x(y) = \sigma(y)$ für $y \neq x$.

$$\begin{aligned} val_\beta(\sigma(\exists xA)) = W & \quad \text{gdw} \quad val_\beta(\exists x\sigma_x(A)) = W \\ & \quad \text{Anwendung von } \sigma \\ \text{gdw} \quad val_{\beta_x^d}(\sigma_x(A)) = W & \quad \text{für ein } d \in D \\ & \quad \text{Def. von } val \\ \text{gdw} \quad val_{(\beta_x^d)''}(A) = W & \quad \text{Ind.Vor} \\ \text{wo } (\beta_x^d)''(y) = val_{\beta_x^d}(\sigma_x(y)) & \quad \text{für all } y. \\ \text{gdw} \quad val_{(\beta')_x^d}(A) = W & \quad \text{Lücke} \end{aligned}$$



Beweis

Induktion nach A .

Exemplarisch: Schritt von A nach $\exists xA$.

Notation: val_β abkürzend für $val_{\mathcal{D},\beta}$.

Außerdem: $\sigma_x(x) = x$, $\sigma_x(y) = \sigma(y)$ für $y \neq x$.

$$\begin{aligned} val_\beta(\sigma(\exists xA)) = W & \quad \text{gdw} \quad val_\beta(\exists x\sigma_x(A)) = W \\ & \quad \text{Anwendung von } \sigma \\ \text{gdw} \quad val_{\beta_x^d}(\sigma_x(A)) = W & \quad \text{für ein } d \in D \\ & \quad \text{Def. von } val \\ \text{gdw} \quad val_{(\beta_x^d)''}(A) = W & \quad \text{Ind.Vor} \\ & \quad \text{wo } (\beta_x^d)''(y) = val_{\beta_x^d}(\sigma_x(y)) \text{ für all } y. \\ \text{gdw} \quad val_{(\beta')_x^d}(A) = W & \quad \text{Lücke} \\ \text{gdw} \quad val_{\beta'}(\exists xA) = W & \\ & \quad \text{Def. von } val \end{aligned}$$



Beweis

Schließen der Lücke

Der Beweis wird vollständig geführt sein, wenn wir die Lücke

$$(\beta_x^d)'' = (\beta')_x^d$$

schließen können. Wir müssen für jede Variable $y \in \text{Frei}(A)$ zeigen

$$(\beta_x^d)''(y) = (\beta')_x^d(y).$$

$$y = x:$$

$$(\beta_x^d)''(x) = \text{val}_{\beta_x^d}(\sigma_x(x)) \quad \text{Def. von } (\beta_x^d)''$$



Beweis

Schließen der Lücke

Der Beweis wird vollständig geführt sein, wenn wir die Lücke

$$(\beta_x^d)'' = (\beta')_x^d$$

schließen können. Wir müssen für jede Variable $y \in \text{Frei}(A)$ zeigen

$$(\beta_x^d)''(y) = (\beta')_x^d(y).$$

$$y = x:$$

$$\begin{aligned} (\beta_x^d)''(x) &= \text{val}_{\beta_x^d}(\sigma_x(x)) && \text{Def. von } (\beta_x^d)'' \\ &= \text{val}_{\beta_x^d}(x) && \text{Def. von } \sigma_x \end{aligned}$$



Beweis

Schließen der Lücke

Der Beweis wird vollständig geführt sein, wenn wir die Lücke

$$(\beta_x^d)'' = (\beta')_x^d$$

schließen können. Wir müssen für jede Variable $y \in \text{Frei}(A)$ zeigen

$$(\beta_x^d)''(y) = (\beta')_x^d(y).$$

$$y = x:$$

$$\begin{aligned} (\beta_x^d)''(x) &= \text{val}_{\beta_x^d}(\sigma_x(x)) && \text{Def. von } (\beta_x^d)'' \\ &= \text{val}_{\beta_x^d}(x) && \text{Def. von } \sigma_x \\ &= \beta_x^d(x) && \text{Def. von } \text{val} \text{ für Variable} \end{aligned}$$



Beweis

Schließen der Lücke

Der Beweis wird vollständig geführt sein, wenn wir die Lücke

$$(\beta_x^d)'' = (\beta')_x^d$$

schließen können. Wir müssen für jede Variable $y \in \text{Frei}(A)$ zeigen

$$(\beta_x^d)''(y) = (\beta')_x^d(y).$$

$$y = x:$$

$$\begin{aligned} (\beta_x^d)''(x) &= \text{val}_{\beta_x^d}(\sigma_x(x)) && \text{Def. von } (\beta_x^d)'' \\ &= \text{val}_{\beta_x^d}(x) && \text{Def. von } \sigma_x \\ &= \beta_x^d(x) && \text{Def. von val für Variable} \\ &= d && \text{Def. der modifizierten Belegung} \end{aligned}$$



Beweis

Schließen der Lücke

Der Beweis wird vollständig geführt sein, wenn wir die Lücke

$$(\beta_x^d)'' = (\beta'_x)^d$$

schließen können. Wir müssen für jede Variable $y \in \text{Frei}(A)$ zeigen

$$(\beta_x^d)''(y) = (\beta'_x)^d(y).$$

$$y = x:$$

$$\begin{aligned} (\beta_x^d)''(x) &= \text{val}_{\beta_x^d}(\sigma_x(x)) && \text{Def. von } (\beta_x^d)'' \\ &= \text{val}_{\beta_x^d}(x) && \text{Def. von } \sigma_x \\ &= \beta_x^d(x) && \text{Def. von val für Variable} \\ &= d && \text{Def. der modifizierten Belegung} \\ &= (\beta'_x)^d(x) && \text{Def. der modifizierten Belegung} \end{aligned}$$



Beweis (Forts)

Schließen der Lücke

$y \neq x$, y frei in A :

$$\begin{aligned}(\beta_x^d)''(y) &= \text{val}_{\beta_x^d}(\sigma_x(y)) && \text{Def. von } (\beta_x^d)'' \\ &= \text{val}_{\beta_x^d}(\sigma(y)) && \text{Def. von } \sigma_x \\ &= \text{val}_{\beta}(\sigma(y)) && \text{da } x \text{ nicht in } \sigma(y) \text{ vorkommt} \\ & && \text{Kollisionsfreiheit von } \sigma \\ &= \beta'(y) && \text{Def. von } \beta' \\ &= (\beta')_x^d(y) && \text{Def. der modifizierten Belegung}\end{aligned}$$



Sir Anthony Hoare



Sir C.A.R. Hoare

Studied philosophy at Oxford U.

Graduate at Moscow State U. 1959

Programmer for Elliott Brothers, 1960

Prof. of CS at Queen's U. Belfast, 1968

*An axiomatic basis for computer
programming*

Communications ACM, 1969

Oxford U. Programming Research, 1977

Microsoft Research, Cambridge, now



Hoare-Kalkül und Substitutionslemma

Die Zuweisungsregel im Hoare-Kalkül lautet:

$$\{\{x/s\}A\} x := s \{A\}$$

wobei die Substitution $\{x/s\}$ kollisionsfrei sein muß.

Die Zuweisungsregel besagt, daß

- ausgehend von einem Zustand, in dem die Formel $\{x/s\}A$ wahr ist,



Hoare-Kalkül und Substitutionslemma

Die Zuweisungsregel im Hoare-Kalkül lautet:

$$\{\{x/s\}A\} x := s \{A\}$$

wobei die Substitution $\{x/s\}$ kollisionsfrei sein muß.

Die Zuweisungsregel besagt, daß

- ausgehend von einem Zustand, in dem die Formel $\{x/s\}A$ wahr ist,
- nach Ausführung der Programmstücks $x := s$



Hoare-Kalkül und Substitutionslemma

Die Zuweisungsregel im Hoare-Kalkül lautet:

$$\{\{x/s\}A\} x := s \{A\}$$

wobei die Substitution $\{x/s\}$ kollisionsfrei sein muß.

Die Zuweisungsregel besagt, daß

- ausgehend von einem Zustand, in dem die Formel $\{x/s\}A$ wahr ist,
- nach Ausführung der Programmstücks $x := s$
- ein Zustand erreicht wird, in dem die Formel A gilt.



Hoare-Kalkül und Substitutionslemma

Hintergrund-Interpretation \mathcal{H} .



Hoare-Kalkül und Substitutionslemma

Hintergrund-Interpretation \mathcal{H} .

Programmzustand= Variablenbelegung β .



Hoare-Kalkül und Substitutionslemma

Hintergrund-Interpretation \mathcal{H} .

Programmzustand= Variablenbelegung β .

Gelte $val_{\mathcal{H},\beta}(\{x/s\}A) = W$

Nach der Zuweisung $x := s$ wird ein Zustand β' erreicht

$$\beta'(y) := \begin{cases} val_{\mathcal{H},\beta}(s) & \text{falls } x = y \\ \beta(y) & \text{sonst} \end{cases}$$



Hoare-Kalkül und Substitutionslemma

Hintergrund-Interpretation \mathcal{H} .

Programmzustand= Variablenbelegung β .

Gelte $val_{\mathcal{H},\beta}(\{x/s\}A) = W$

Nach der Zuweisung $x := s$ wird ein Zustand β' erreicht

$$\beta'(y) := \begin{cases} val_{\mathcal{H},\beta}(s) & \text{falls } x = y \\ \beta(y) & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Regel behauptet $val_{\mathcal{H},\beta'}(A) = W$.



Hoare-Kalkül und Substitutionslemma

Hintergrund-Interpretation \mathcal{H} .

Programmzustand = Variablenbelegung β .

Gelte $val_{\mathcal{H},\beta}(\{x/s\}A) = W$

Nach der Zuweisung $x := s$ wird ein Zustand β' erreicht

$$\beta'(y) := \begin{cases} val_{\mathcal{H},\beta}(s) & \text{falls } x = y \\ \beta(y) & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Regel behauptet $val_{\mathcal{H},\beta'}(A) = W$.

Das ist gerade die Aussage des Substitutionslemmas für die Formel A ist und die Substitution $\sigma = \{x/s\}$.



Anwendung des Substitutionslemmas

Theorem

Sei Σ eine Signatur, \mathcal{D} eine Interpretation für Σ , β eine Belegung und σ eine für A kollisionsfreie Substitution mit $\sigma(y) = y$ für alle Variablen $y \neq x$, dann gilt:



Anwendung des Substitutionslemmas

Theorem

Sei Σ eine Signatur, \mathcal{D} eine Interpretation für Σ , β eine Belegung und σ eine für A kollisionsfreie Substitution mit $\sigma(y) = y$ für alle Variablen $y \neq x$, dann gilt:

- $\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(\forall x A \rightarrow \sigma(A)) = W$



Anwendung des Substitutionslemmas

Theorem

Sei Σ eine Signatur, \mathcal{D} eine Interpretation für Σ , β eine Belegung und σ eine für A kollisionsfreie Substitution mit $\sigma(y) = y$ für alle Variablen $y \neq x$, dann gilt:

- $\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(\forall xA \rightarrow \sigma(A)) = W$
- $\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(A) \rightarrow \exists xA) = W$.



Beweis

Wir nehmen an, daß $\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(\forall xA) = W$ gilt, d.h.

$$\text{val}_{\mathcal{D},\beta_x^d}(A) = W \text{ für alle } d \in D.$$



Beweis

Wir nehmen an, daß $val_{\mathcal{D},\beta}(\forall xA) = W$ gilt, d.h.

$$val_{\mathcal{D},\beta_x^d}(A) = W \text{ für alle } d \in D.$$

Zu zeigen ist

$$val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(A)) = W$$



Beweis

Wir nehmen an, daß $val_{\mathcal{D},\beta}(\forall xA) = W$ gilt, d.h.

$$val_{\mathcal{D},\beta_x^d}(A) = W \text{ für alle } d \in D.$$

Zu zeigen ist

$$val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(A)) = W$$

Nach dem Substitutionslemma ist das gleichbedeutend mit

$$val_{\mathcal{D},\beta'}(A) = W$$

wobei

$$\beta'(y) = val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(y)) = \begin{cases} \beta(y) & \text{falls } x \neq y \\ val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(x)) & \text{falls } y = x \end{cases}$$



Beweis

Wir nehmen an, daß $val_{\mathcal{D},\beta}(\forall xA) = W$ gilt, d.h.

$$val_{\mathcal{D},\beta_x^d}(A) = W \text{ für alle } d \in D.$$

Zu zeigen ist

$$val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(A)) = W$$

Nach dem Substitutionslemma ist das gleichbedeutend mit

$$val_{\mathcal{D},\beta'}(A) = W$$

wobei

$$\beta'(y) = val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(y)) = \begin{cases} \beta(y) & \text{falls } x \neq y \\ val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(x)) & \text{falls } y = x \end{cases}$$

Also $\beta' = \beta_x^d$ für $d = val_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(x))$.

Die zweite Aussage läßt sich analog beweisen.



Der Modellbegriff

Den Modell und Folgerungsbegriff definieren wir nur für Formeln und Formelmengen ohne freie Variablen

Das ist mit Abstand der häufigste Anwendungsfall

Der Fall mit freien Variablen wird ausführlich in den Übungsaufgaben im Skript behandelt



Der Modellbegriff

Den Modell und Folgerungsbegriff definieren wir nur für Formeln und Formelmengen ohne freie Variablen

Das ist mit Abstand der häufigste Anwendungsfall

Der Fall mit freien Variablen wird ausführlich in den Übungsaufgaben im Skript behandelt

Definition

- Eine Interpretation \mathcal{D} über Σ nennen wir ein **Modell** einer Formel A ohne freie Variablen über Σ , wenn $val_{\mathcal{D}}(A) = W$.



Der Modellbegriff

Den Modell und Folgerungsbegriff definieren wir nur für Formeln und Formelmengen ohne freie Variablen

Das ist mit Abstand der häufigste Anwendungsfall

Der Fall mit freien Variablen wird ausführlich in den Übungsaufgaben im Skript behandelt

Definition

- Eine Interpretation \mathcal{D} über Σ nennen wir ein **Modell** einer Formel A ohne freie Variablen über Σ , wenn $val_{\mathcal{D}}(A) = W$.
- \mathcal{D} heißt **Modell** einer Formelmenge M ohne freie Variablen, wenn für jede Formel $B \in M$ gilt $val_{\mathcal{D}}(B) = W$.



Der logische Folgerungsbegriff

Definition

Es sei $M \subseteq \text{For}_\Sigma$, $A \in \text{For}_\Sigma$, beide ohne freie Variablen.

$$M \models_\Sigma A \quad :\Leftrightarrow$$

Jedes Modell von M ist auch Modell von A .

Lies: **Aus M folgt A** (über Σ).

Kurznotationen:

\models statt \models_Σ ,

$\models A$ für $\emptyset \models A$,

$B \models A$ für $\{B\} \models A$.



Bemerkungen zum Modellbegriff

$M \models A$ gdw $M \cup \{\neg A\}$
hat kein Modell



Allgemeingültigkeit

Definition

$A \in For_{\Sigma}$ heißt

- **allgemeingültig** gdw $\models A$



Allgemeingültigkeit

Definition

$A \in For_{\Sigma}$ heißt

- **allgemeingültig** gdw $\models A$
- **erfüllbar** gdw $\neg A$ ist nicht allgemeingültig.



Allgemeingültigkeit

Theorem



Allgemeingültigkeit

Theorem

1. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:



Allgemeingültigkeit

Theorem

1. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
 - 1.1 A allgemeingültig



Allgemeingültigkeit

Theorem

1. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
 - 1.1 A allgemeingültig
 - 1.2 Jede Interpretation \mathcal{D} ist Modell von A .



Allgemeingültigkeit

Theorem

1. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
 - 1.1 A allgemeingültig
 - 1.2 Jede Interpretation \mathcal{D} ist Modell von A .
 - 1.3 $\text{val}_{\mathcal{D}}(A) = W$ für alle \mathcal{D} .



Allgemeingültigkeit

Theorem

1. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
 - 1.1 A allgemeingültig
 - 1.2 Jede Interpretation \mathcal{D} ist Modell von A .
 - 1.3 $\text{val}_{\mathcal{D}}(A) = W$ für alle \mathcal{D} .
2. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:



Allgemeingültigkeit

Theorem

1. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
 - 1.1 A allgemeingültig
 - 1.2 Jede Interpretation \mathcal{D} ist Modell von A .
 - 1.3 $\text{val}_{\mathcal{D}}(A) = W$ für alle \mathcal{D} .
2. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
 - 2.1 A erfüllbar



Allgemeingültigkeit

Theorem

1. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
 - 1.1 A allgemeingültig
 - 1.2 Jede Interpretation \mathcal{D} ist Modell von A .
 - 1.3 $\text{val}_{\mathcal{D}}(A) = W$ für alle \mathcal{D} .
2. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
 - 2.1 A erfüllbar
 - 2.2 Es gibt \mathcal{D} mit $\text{val}_{\mathcal{D}}(A) = W$



Beispiele für allgemeingültige Formeln

1. $\neg\forall xA \leftrightarrow \exists x\neg A,$



Beispiele für allgemeingültige Formeln

1. $\neg\forall xA \leftrightarrow \exists x\neg A,$

2. $\neg\exists xA \leftrightarrow \forall x\neg A$



Beispiele für allgemeingültige Formeln

1. $\neg\forall xA \leftrightarrow \exists x\neg A,$
2. $\neg\exists xA \leftrightarrow \forall x\neg A$
3. $\forall x\forall yA \leftrightarrow \forall y\forall xA,$



Beispiele für allgemeingültige Formeln

1. $\neg\forall xA \leftrightarrow \exists x\neg A$,
2. $\neg\exists xA \leftrightarrow \forall x\neg A$
3. $\forall x\forall yA \leftrightarrow \forall y\forall xA$,
4. $\exists x\exists yA \leftrightarrow \exists y\exists xA$



Beispiele für allgemeingültige Formeln

1. $\neg\forall xA \leftrightarrow \exists x\neg A$,
2. $\neg\exists xA \leftrightarrow \forall x\neg A$
3. $\forall x\forall yA \leftrightarrow \forall y\forall xA$,
4. $\exists x\exists yA \leftrightarrow \exists y\exists xA$
5. $\forall x(A \wedge B) \leftrightarrow \forall xA \wedge \forall xB$



Beispiele für allgemeingültige Formeln

1. $\neg\forall xA \leftrightarrow \exists x\neg A$,
2. $\neg\exists xA \leftrightarrow \forall x\neg A$
3. $\forall x\forall yA \leftrightarrow \forall y\forall xA$,
4. $\exists x\exists yA \leftrightarrow \exists y\exists xA$
5. $\forall x(A \wedge B) \leftrightarrow \forall xA \wedge \forall xB$
6. $\exists x(A \vee B) \leftrightarrow \exists xA \vee \exists xB$



Beispiele für allgemeingültige Formeln

1. $\neg\forall xA \leftrightarrow \exists x\neg A$,
2. $\neg\exists xA \leftrightarrow \forall x\neg A$
3. $\forall x\forall yA \leftrightarrow \forall y\forall xA$,
4. $\exists x\exists yA \leftrightarrow \exists y\exists xA$
5. $\forall x(A \wedge B) \leftrightarrow \forall xA \wedge \forall xB$
6. $\exists x(A \vee B) \leftrightarrow \exists xA \vee \exists xB$
7. $\forall \vec{y}(A \wedge QxB \leftrightarrow Qx(A \wedge B))$,
falls $x \notin \text{Frei}(A)$ und \vec{y} alle freie Variablen in $A \wedge QxB$ sind.



Beispiele für allgemeingültige Formeln

1. $\neg\forall xA \leftrightarrow \exists x\neg A$,
2. $\neg\exists xA \leftrightarrow \forall x\neg A$
3. $\forall x\forall yA \leftrightarrow \forall y\forall xA$,
4. $\exists x\exists yA \leftrightarrow \exists y\exists xA$
5. $\forall x(A \wedge B) \leftrightarrow \forall xA \wedge \forall xB$
6. $\exists x(A \vee B) \leftrightarrow \exists xA \vee \exists xB$
7. $\forall\vec{y}(A \wedge QxB \leftrightarrow Qx(A \wedge B))$,
falls $x \notin \text{Frei}(A)$ und \vec{y} alle freie Variablen in $A \wedge QxB$ sind.
8. $\forall\vec{y}(QxA \wedge B \leftrightarrow Qx(A \wedge B))$,
falls $x \notin \text{Frei}(B)$ und \vec{y} alle freie Variablen in $A \wedge QxB$ sind.



Beispiele für allgemeingültige Formeln

1. $\neg\forall xA \leftrightarrow \exists x\neg A$,
2. $\neg\exists xA \leftrightarrow \forall x\neg A$
3. $\forall x\forall yA \leftrightarrow \forall y\forall xA$,
4. $\exists x\exists yA \leftrightarrow \exists y\exists xA$
5. $\forall x(A \wedge B) \leftrightarrow \forall xA \wedge \forall xB$
6. $\exists x(A \vee B) \leftrightarrow \exists xA \vee \exists xB$
7. $\forall\vec{y}(A \wedge QxB \leftrightarrow Qx(A \wedge B))$,
falls $x \notin \text{Frei}(A)$ und \vec{y} alle freie Variablen in $A \wedge QxB$ sind.
8. $\forall\vec{y}(QxA \wedge B \leftrightarrow Qx(A \wedge B))$,
falls $x \notin \text{Frei}(B)$ und \vec{y} alle freie Variablen in $A \wedge QxB$ sind.
9. $\forall\vec{y}(A \vee QxB \leftrightarrow Qx(A \vee B))$,
falls $x \notin \text{Frei}(A)$ und \vec{y} alle freie Variablen in $A \wedge QxB$ sind.



Beispiele für allgemeingültige Formeln

1. $\neg\forall xA \leftrightarrow \exists x\neg A$,
2. $\neg\exists xA \leftrightarrow \forall x\neg A$
3. $\forall x\forall yA \leftrightarrow \forall y\forall xA$,
4. $\exists x\exists yA \leftrightarrow \exists y\exists xA$
5. $\forall x(A \wedge B) \leftrightarrow \forall xA \wedge \forall xB$
6. $\exists x(A \vee B) \leftrightarrow \exists xA \vee \exists xB$
7. $\forall \vec{y}(A \wedge QxB \leftrightarrow Qx(A \wedge B))$,
falls $x \notin \text{Frei}(A)$ und \vec{y} alle freie Variablen in $A \wedge QxB$ sind.
8. $\forall \vec{y}(QxA \wedge B \leftrightarrow Qx(A \wedge B))$,
falls $x \notin \text{Frei}(B)$ und \vec{y} alle freie Variablen in $A \wedge QxB$ sind.
9. $\forall \vec{y}(A \vee QxB \leftrightarrow Qx(A \vee B))$,
falls $x \notin \text{Frei}(A)$ und \vec{y} alle freie Variablen in $A \wedge QxB$ sind.
10. $\forall \vec{y}(QxA \vee B \leftrightarrow Qx(A \vee B))$,
falls $x \notin \text{Frei}(B)$ und \vec{y} alle freie Variablen in $A \wedge QxB$ sind.



Beweisbeispiel

Voraussetzung: $x \notin \text{Frei}(A)$

Für alle \mathcal{D}, β ist zu zeigen:

$$\text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(A \rightarrow \forall x B) = \text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(\forall x(A \rightarrow B))$$

Falls $\text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(A \rightarrow \forall x B) = W$, dann folgt unmittelbar aus der Definition von val $\text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(\forall x(A \rightarrow B)) = W$ (Übung).

Sei jetzt $\text{val}_{\mathcal{D}, I, \beta}(\forall x(A \rightarrow B)) = W$, d. h. für alle $d \in D$:

$$(\text{val}_{\mathcal{D}, \beta_x^d}(A) = W \Rightarrow \text{val}_{\mathcal{D}, I, \beta_x^d}(B) = W). \quad (*)$$

Angenommen, es wäre $\text{val}_{\mathcal{D}, I, \beta}(A \rightarrow \forall x B) = F$. Dann gilt also

$$\text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(A) = W \quad \text{und} \quad \text{val}_{\mathcal{D}, \beta}(\forall x B) = F$$

es gibt also ein $e \in D$ mit $\text{val}_{\mathcal{D}, \beta_x^e}(B) = F$.

Wegen $x \notin \text{Frei}(A)$ gilt auch $\text{val}_{\mathcal{D}, \beta_x^e}(A) = W$. Aus (*) folgt somit der Widerspruch

$$\text{val}_{\mathcal{D}, \beta_x^e}(B) = W$$



Beispiel für ein Ableitbarkeitsproblem

$$\begin{array}{l} \forall x \forall y \forall z (r(x, y) \wedge r(y, z) \rightarrow r(x, z)) \\ \forall x \forall y (r(x, y) \rightarrow r(y, x)) \\ \forall x \exists y (r(x, y)) \end{array} \models \forall x r(x, x)$$



Beispiel für ein Ableitbarkeitsproblem

$$\begin{aligned} &\forall x \forall y \forall z (r(x, y) \wedge r(y, z) \rightarrow r(x, z)) \\ &\forall x \forall y (r(x, y) \rightarrow r(y, x)) \quad \models \quad \forall x r(x, x) \\ &\forall x \exists y (r(x, y)) \end{aligned}$$

Transitivität

Symmetrie \models Reflexivität

Endlosigkeit



Beispiel für ein Ableitbarkeitsproblem

$$\begin{array}{l} \forall x \forall y \forall z (r(x, y) \wedge r(y, z) \rightarrow r(x, z)) \\ \forall x \forall y (r(x, y) \rightarrow r(y, x)) \\ \forall x \exists y (r(x, y)) \end{array} \models \forall x r(x, x)$$

Transitivität

Symmetrie \models Reflexivität

Endlosigkeit

Die Antwort ist

JA



2. Beispiel für ein Ableitbarkeitsproblem

$$\neg \exists x (a < x \wedge c(x) \wedge \forall y (a \leq y < x \rightarrow b(y)))$$

\vdash

$$\exists x (a < x \wedge \neg c(x) \wedge \forall y (a \leq y < x \rightarrow \neg b(y)))$$



2. Beispiel für ein Ableitbarkeitsproblem

$$\neg \exists x (a < x \wedge c(x) \wedge \forall y (a \leq y < x \rightarrow b(y)))$$

\vdash

$$\exists x (a < x \wedge \neg c(x) \wedge \forall y (a \leq y < x \rightarrow \neg b(y)))$$

Gegenbeispiel:

a		p_1		p_2
\cdot	$<$	\cdot	$<$	\cdot
$b(a)$		$\neg b(p_1)$		$\neg b(p_2)$
$\neg c(a)$		$\neg c(p_1)$		$c(p_2)$

