

Formale Systeme

Prof. Dr. Bernhard Beckert

Fakultät für Informatik
Universität Karlsruhe (TH)



Winter 2008/2009



Kalküle für die Aussagenlogik

Übersicht

1. Hilbert-Kalkül
2. Resolutionskalkül
3. Tableauekalkül
4. Sequenzenkalkül



Sequenzkalküle

- 1935 von G. GENTZEN eingeführt



Sequenzkalküle

- 1935 von G. GENTZEN eingeführt
- spielen eine zentrale Rolle in der Beweistheorie



Sequenzkalküle

- 1935 von G. GENTZEN eingeführt
- spielen eine zentrale Rolle in der Beweistheorie
- Literatur: J. Gallier. *Logic for Computer Science*. Harper & Row 1986



Sequenzen

Definition

Eine *Sequenz* ist ein Paar endlicher Mengen von Formeln und wird notiert in der Form

$$\Gamma \Rightarrow \Delta.$$

Γ wird Antezedent und Δ Sukzedent genannt.

Sowohl links wie rechts vom Sequenzenpfeil \Rightarrow kann auch die leere Menge stehen. Wir schreiben dann

$$\Rightarrow \Delta \text{ bzw. } \Gamma \Rightarrow \text{ bzw. } \Rightarrow.$$



Sequenzen

Abkürzende Schreibweisen

Ist $\Gamma = \{A_1, \dots, A_n\}$ und B eine Formel, so schreiben wir

Γ, B für die Menge $\{A_1, \dots, A_n, B\}$,

Entsprechend werden

B, Γ Γ, Δ Γ, B, Δ

benutzt.



Semantik von Sequenzen

Sei I eine Interpretation.

Definition: Auswertung von Sequenzen

$$val_I(\Gamma \Rightarrow \Delta) = val_I(\bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta) \quad \text{für } \Gamma, \Delta \neq \emptyset$$

$$val_I(\Gamma \Rightarrow) = val_I(\neg \bigwedge \Gamma)$$

$$val_I(\Rightarrow \Delta) = val_I(\bigvee \Delta)$$

$$val_I(\Rightarrow) = \mathbf{F}$$

$\bigwedge \Gamma$ = Konjunktion aller Formeln in Γ

$\bigvee \Gamma$ = Disjunktion aller Formeln in Γ

Die Konjunktion über die leere Folge wird demnach zu **W** und die Disjunktion über die leere Folge zu **F** ausgewertet.



Axiome und Regeln

Definition

Axiome:

$$\Gamma, A, \Gamma' \Rightarrow \Delta, A, \Delta'.$$

Die Regeln sind

$$(\neg\text{links}) \frac{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma, \neg A, \Gamma' \Rightarrow \Delta}$$



Axiome und Regeln

Definition

Axiome:

$$\Gamma, A, \Gamma' \Rightarrow \Delta, A, \Delta'.$$

Die Regeln sind

$$(\neg\text{links}) \frac{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma, \neg A, \Gamma' \Rightarrow \Delta}$$

$$(\wedge\text{links}) \frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (A \wedge B), \Gamma' \Rightarrow \Delta}$$



Axiome und Regeln

Definition

Axiome:

$$\Gamma, A, \Gamma' \Rightarrow \Delta, A, \Delta'.$$

Die Regeln sind

$$(\neg\text{links}) \frac{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma, \neg A, \Gamma' \Rightarrow \Delta}$$

$$(\wedge\text{links}) \frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (A \wedge B), \Gamma' \Rightarrow \Delta}$$

$$(\vee\text{links}) \frac{\Gamma, A, \Gamma' \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, B, \Gamma' \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (A \vee B), \Gamma' \Rightarrow \Delta}$$

Axiome und Regeln

Definition

Axiome:

$$\Gamma, A, \Gamma' \Rightarrow \Delta, A, \Delta'.$$

Die Regeln sind

$$(\neg\text{links}) \frac{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma, \neg A, \Gamma' \Rightarrow \Delta}$$

$$(\wedge\text{links}) \frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (A \wedge B), \Gamma' \Rightarrow \Delta}$$

$$(\vee\text{links}) \frac{\Gamma, A, \Gamma' \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, B, \Gamma' \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (A \vee B), \Gamma' \Rightarrow \Delta}$$

$$(\rightarrow\text{links}) \frac{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow A, \Delta \quad B, \Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (A \rightarrow B), \Gamma' \Rightarrow \Delta}$$



Regeln (Forts.)

Definition: Fortsetzung

$$(\neg\text{-rechts}) \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A, \Delta'}$$

Regeln (Forts.)

Definition: Fortsetzung

$$(\neg\text{rechts}) \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A, \Delta'}$$

$$(\wedge\text{rechts}) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, \Delta' \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \wedge B), \Delta'}$$

Regeln (Forts.)

Definition: Fortsetzung

$$(\neg\text{rechts}) \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A, \Delta'}$$

$$(\wedge\text{rechts}) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, \Delta' \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \wedge B), \Delta'}$$

$$(\vee\text{rechts}) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \vee B), \Delta'}$$

Regeln (Forts.)

Definition: Fortsetzung

$$(\neg\text{rechts}) \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A, \Delta'}$$

$$(\wedge\text{rechts}) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, \Delta' \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \wedge B), \Delta'}$$

$$(\vee\text{rechts}) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \vee B), \Delta'}$$

$$(\rightarrow\text{rechts}) \frac{A, \Gamma \Rightarrow B, \Delta, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \rightarrow B), \Delta'}$$

Regeln (Forts.)

Definition: Fortsetzung

$$(\neg\text{rechts}) \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A, \Delta'}$$

$$(\wedge\text{rechts}) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, \Delta' \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \wedge B), \Delta'}$$

$$(\vee\text{rechts}) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \vee B), \Delta'}$$

$$(\rightarrow\text{rechts}) \frac{A, \Gamma \Rightarrow B, \Delta, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \rightarrow B), \Delta'}$$

Regeln (Forts.)

Definition: Fortsetzung

$$(\neg\text{rechts}) \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A, \Delta'}$$

$$(\wedge\text{rechts}) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, \Delta' \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \wedge B), \Delta'}$$

$$(\vee\text{rechts}) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \vee B), \Delta'}$$

$$(\rightarrow\text{rechts}) \frac{A, \Gamma \Rightarrow B, \Delta, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \rightarrow B), \Delta'}$$

Zusätzliche Regeln für eine Menge M von Voraussetzungen

$$(\text{einfügen}_M) \frac{B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

für $B \in M$

Beispiel einer Ableitung im Sequenzenkalkül

an der Tafel!



Ableitbarkeit im Sequenzenkalkül

Definition

Für $A \in \text{For}_0$, $M \subseteq \text{For}_0$ sagen wir, dass A aus M ableitbar in **S0** ist,

$$M \vdash_{\mathbf{S0}} A,$$

gdw.

eine Ableitung von $\Rightarrow A$ aus M in **S0** existiert.



Korrektheits und Vollständigkeitsatz

Theorem

S0 ist korrekt und vollständig:
es gilt also

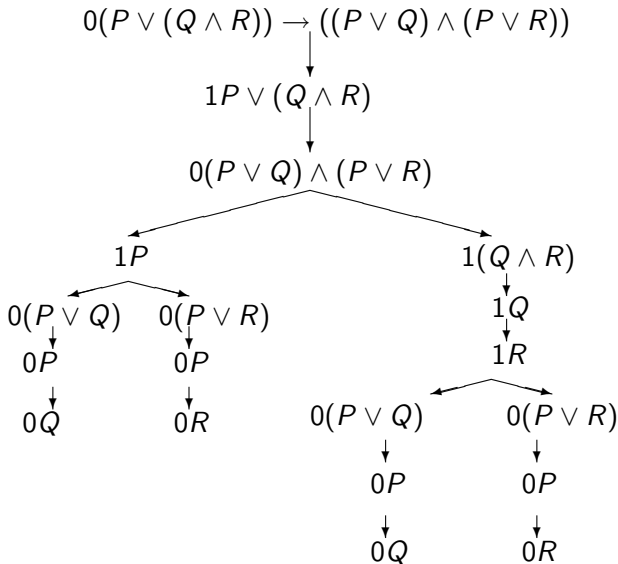
$$M \models A \iff M \vdash_{\mathbf{S0}} A.$$

Beweis

Siehe etwa Gallier, 1986.



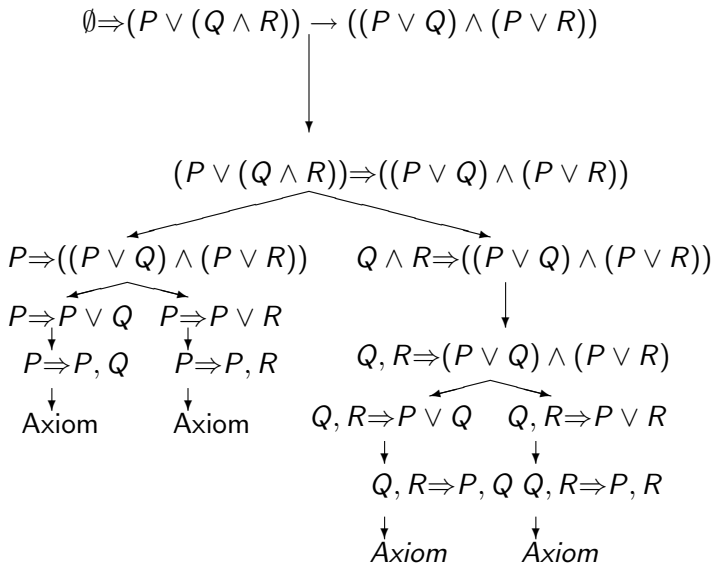
Beispiel eines Tableau-Beweises



S0-Ableitung von
 $(P \vee (Q \wedge R)) \rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$

- | | | |
|------|--|------------------------|
| (1) | $P \Rightarrow P, Q$ | (Axiom) |
| (2) | $P \Rightarrow P, R$ | (Axiom) |
| (3) | $Q, R \Rightarrow P, Q$ | (Axiom) |
| (4) | $Q, R \Rightarrow P, R$ | (Axiom) |
| (5) | $P \Rightarrow P \vee Q$ | (\vee re 1) |
| (6) | $P \Rightarrow P \vee R$ | (\vee re 2) |
| (7) | $Q, R \Rightarrow P \vee Q$ | (\vee re 3) |
| (8) | $Q, R \Rightarrow P \vee R$ | (\vee re 4) |
| (9) | $P \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$ | (\wedge re 5,6) |
| (10) | $Q \wedge R \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$ | (\wedge re 7,8) |
| (11) | $(P \vee (Q \wedge R)) \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$ | (\vee li 9,10) |
| (12) | $\emptyset \Rightarrow (P \vee (Q \wedge R)) \rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$ | (\rightarrow re 11) |





Transformation von Tableau zu Sequenz

Definition

T ein beliebiges Tableau. Wir definieren einen Ableitungsbaum $Seq(T)$ im Sequenzkalkül wie folgt:

Bei der Anwendung einer α -Regel beim Aufbau des Tableaus T , werden jeweils zwei Knoten hinzugefügt, der erste und der zweite α -Knoten. Die Knoten von $Seq(T)$ sind alle Knoten von T mit Ausnahme der ersten α Knoten.

Ein Knoten, N , in $Seq(T)$ wird mit der Sequenz

$$A_1, \dots, A_k \Rightarrow B_1, \dots, B_n$$

markiert, wobei A_1, \dots, A_k alle Formeln sind, so dass $1A_i$ auf dem Teilpfad P vorkommt, der von N zur Wurzel von T führt und B_1, \dots, B_n alle Formeln sind, so dass $0B_i$ auf P liegt und noch keine Tableauregel auf $1A_i$ und $0B_i$ angewendet wurde.

Transformation von Tableau zu Sequenz

Theorem (Korrektheit der Transformation Seq)

Ist T ein abgeschlossenes Tableau, so ist $\text{Seq}(T)$ ein Beweisbaum im Sequenzenkalkül.

