UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. B. Beckert
M. Ulbrich

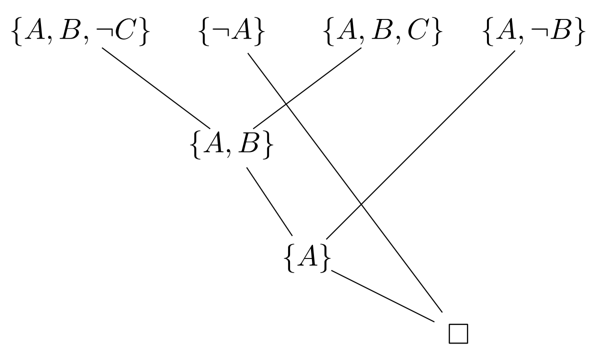
Formale Systeme, WS 2008/2009

Lösungen zum Übungsblatt 2

Dieses Blatt wurde in der Übung am 14.11.2008 besprochen.

Zu Aufgabe 1

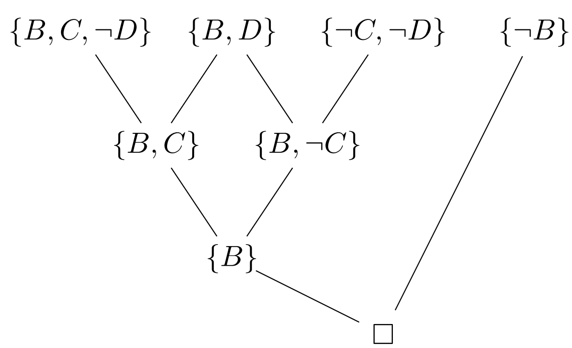
(a) 1. Schritt: Resolution



(b) 1. Schritt: Formel negieren

$$(B \vee C \vee \neg D) \wedge (B \vee D) \wedge (\neg C \vee \neg D) \wedge \neg B$$

2. Schritt: Klauselschreibweise und Resolution



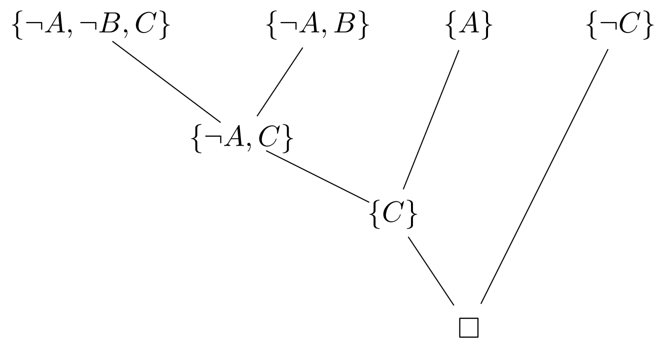
(c) 1. Schritt: Formel negieren

$$\neg((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$$

2. Schritt: In KNF transformieren

$$\begin{aligned}
&\neg(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)) \equiv \\
&(A \to (B \to C)) \wedge \neg((A \to B) \to (A \to C)) \equiv \\
&(A \to (B \to C)) \wedge ((A \to B) \wedge \neg(A \to C)) \equiv \\
&(\neg A \vee (B \to C)) \wedge ((\neg A \vee B) \wedge (A \wedge \neg C)) \equiv \\
&(\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B) \wedge A \wedge \neg C
\end{aligned}$$

3. Schritt: Klauselschreibweise und Resolution



Zu Aufgabe 2

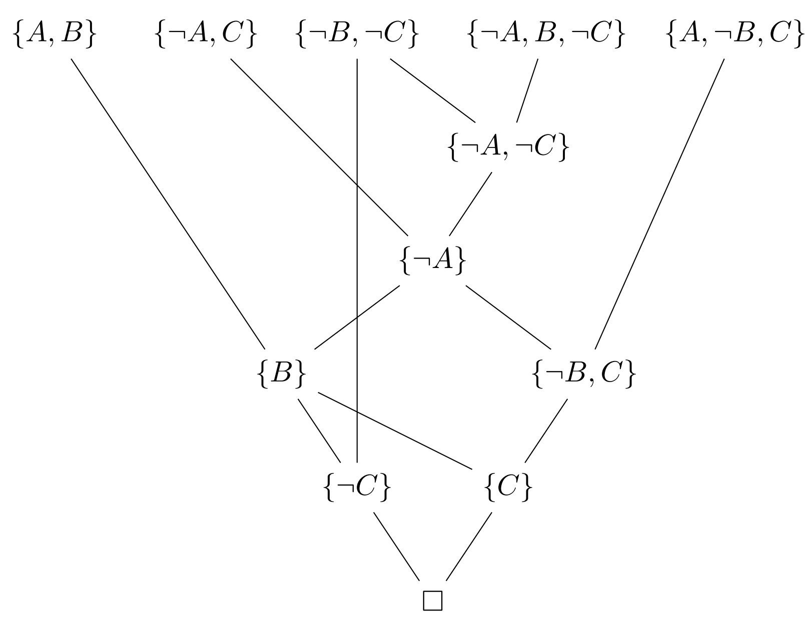
Diese Variante des Resolutionskalküls ist *nicht* vollständig, d.h. es gibt unerfüllbare Klauselmengen, aus denen nicht die leere Klausel abgeleitet werden kann.

Behauptung Die Klauselmenge

$$\{A, B\}, \{\neg A, C\}, \{\neg B, \neg C\}, \{\neg A, B, \neg C\}, \{A, \neg B, C\}$$

ist unerfüllbar, es gibt aber keine Resolutionsableitung, in der jede Klausel höchstens ein Mal benutzt wird.

Unerfüllbarkeit Folgender Resolutionsbeweis zeigt die Unerfüllbarkeit der Menge:



Zu zeigen: Es gibt keine Ableitung der leeren Klausel ohne mindestens eins Klausel mehrmals zu verwenden.

Folgendes ist dafür zu beobachten:

1. Bei jedem Resolutionsschritt nimmt die Anzahl der zur Verfügung stehenden Klauseln um genau eins ab.

2. Die leere Klausel kann in einem Schritt nur aus zwei Einerklauseln abgeleitet werden.

Wegen Punkt 1 kann bei fünf Ausgangsklauseln ein Beweis nur maximal *vier* Schritte umfassen, wobei nach dem vierten Schritt die leere Klausel entstehen muss. Wegen Punkt 2 muss also wenigstens eine Einerklausel in einem Schritt (die andere dann in höchstens zwei) Schritten aus der Ausgangsmenge herleitbar sein. Resolviert man aber je zwei Klauseln aus der Menge, so stellt man fest, dass nie eine Einerklausel in einem Schritt herleitbar ist. Es gibt also keinen solchen Beweis.

Zu Aufgabe 3

(a) Es gibt mehrere Möglichkeiten, einen linearen Beweis zu führen. Eine ist:

$$\begin{tikzcd}
\{A, D\} \arrow[d, dash] & \{\neg D, B\} \arrow[dl, dash] \\
\{A, B\} \arrow[d, dash] & \{\neg A, B\} \arrow[dl, dash] \\
\{B\} \arrow[d, dash] & \{\neg B\} \arrow[dl, dash] \\
\square &
\end{tikzcd}$$

(b) Auch hier gibt es mehrere Möglichkeiten. Wie in der Aufgabenstellung erwähnt, ist die Wahl der Startklausel von Bedeutung sein. Wählt man dafür z. B. $\{C, B\}$ aus, so gerät man in eine Sackgasse, man hat keine Möglichkeit, das Literal C loszubekommen, was daran liegt, dass C kein „Gegenstück“ in der Klauselmenge besitzt (solch ein Literal nennt man „pur“).

$$\begin{tikzcd}
\{C, B\} \arrow[d, dash] & \{\neg B\} \arrow[dl, dash] \\
\{C\} &
\end{tikzcd}$$

Zu Aufgabe 4

Abbildung 1 zeigt Tableaubeweise für beide Teilaufgaben. Das Tableau für Teilaufgabe (a) lässt sich schließen, die Allgemeingültigkeit der Formel φ_a ist damit bewiesen.

Das Tableau für die Formel $\neg\varphi_b$ lässt sich auch im erschöpften Zustand nicht schließen, daher ist $\neg\varphi_b$ erfüllbar, φ_b also nicht allgemeingültig.

Die Abbildungen sind mit der Vorzeichen-Variante des Kalküls aus der Vorlesung erstellt und die Regelanwendungen darin markiert. Dabei steht eine rote Kante für eine α- und eine blaue für eine β-Erweiterung. Die jeweils letzten Formeln im Tableau von (b) gehen aus der β-Formel $1B \to C$ hervor.

Ein erschöpftes, nicht geschlossenes Tableau hat einen Ast, der nicht geschlossen werden kann. Dieser Erlaubt das Ablesen einer Interpretation, die die Wurzelformel erfüllt: Setze für jede Variable $P \in \Sigma$

- wenn $0P$ auf dem Ast vorkommt $I(P) := F$,
- wenn $1P$ auf dem Ast vorkommt $I(P) := W$.
- andernfalls $I(P)$ beliebig.

Zur Begründung siehe Lemma 3.34 im Skript.

Insbesondere wird die Wurzel des Baumes erfüllt, das Negat der Formel, die auf Allgemeingültigkeit überprüft werden soll. Für diese Formel ist die Belegung also ein Gegenbeispiel zur Allgemeingültigkeit.

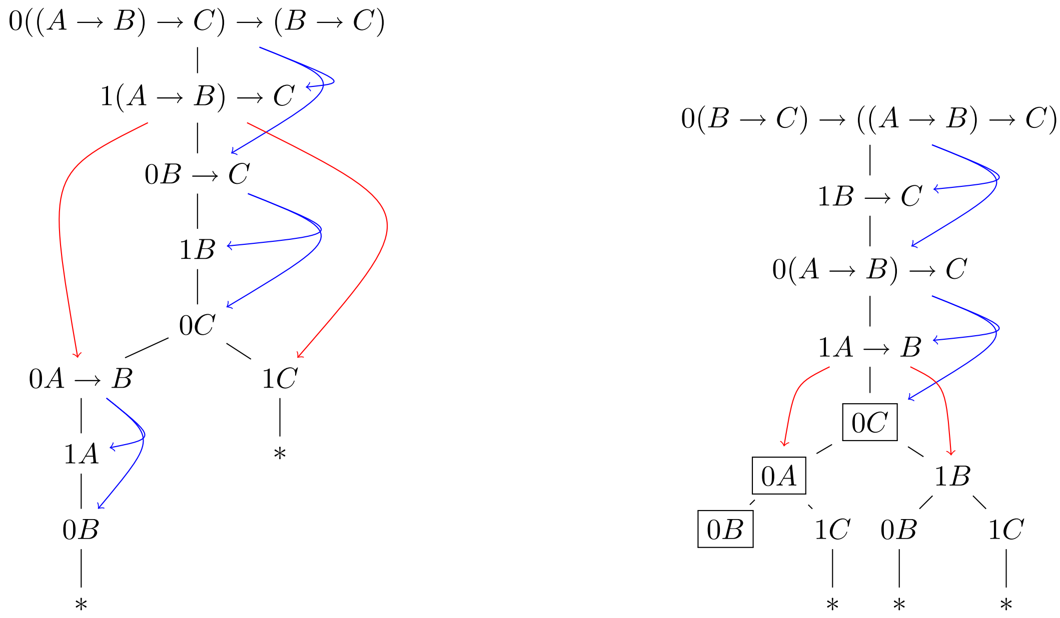


Abbildung 1: Tableaubeweise zu Aufgabe 4(a) (links) und 4(b) (rechts)

Für (b) ist das der Fall für die Belegung I mit $I(A) = I(B) = I(C) = F$. Denn dann gilt: $\text{val}_I(\phi_b) = F$.

Zu Aufgabe 5

(a)

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{1sh(P_1, P_2, P_3)} \\ \hline 1P_1 & 0P_1 \\ 1P_3 & 1P_2 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{0sh(P_1, P_2, P_3)} \\ \hline 1P_1 & 0P_1 \\ 0P_3 & 0P_2 \end{array}$$

(b) Es ist zu zeigen: Für eine beliebige Interpretation I gilt

$$\text{val}_I(1sh(P_1, P_2, P_3)) = W \qquad \text{gdw.} \qquad \begin{array}{c} \text{val}_I(1P_1) = W \text{ und } \text{val}_I(1P_3) = W \\ \text{oder} \\ \text{val}_I(0P_1) = W \text{ und } \text{val}_I(1P_2) = W \end{array}$$

Dabei ist die Richtung $\Rightarrow$ der Korrektheits- und die Richtung $\Leftarrow$ der Vollständigkeitsteil des Beweises.

Die Behauptung ergibt sich aus:

$$\begin{array}{ll} & \text{val}_I(1sh(P_1, P_2, P_3)) = W \\ \text{gdw.} & \text{val}_I(sh(P_1, P_2, P_3)) = W \\ \text{gdw.} & \text{val}_I(P_1 \wedge P_3 \vee \neg P_1 \wedge P_2) = W \\ \text{gdw.} & \text{val}_I(P_1 \wedge P_3) = W \text{ oder } \text{val}_I(\neg P_1 \wedge P_2) = W \\ \text{gdw.} & \text{val}_I(P_1) = W \text{ und } \text{val}_I(P_3) = W \text{ oder } \text{val}_I(\neg P_1) = W \text{ und } \text{val}_I(P_2) = W \\ \text{gdw.} & \text{val}_I(1P_1) = W \text{ und } \text{val}_I(1P_3) = W \text{ oder } \text{val}_I(0P_1) = W \text{ und } \text{val}_I(1P_2) = W \end{array}$$

Analog für ist für die zweite Regel zu zeigen, dass

$$\text{val}_I(0sh(P_1, P_2, P_3)) = W \qquad \text{gdw.} \qquad \begin{array}{c} \text{val}_I(1P_1) = W \text{ und } \text{val}_I(0P_3) = W \\ \text{oder} \\ \text{val}_I(0P_1) = W \text{ und } \text{val}_I(0P_2) = W \end{array}$$

Das ergibt sich aus:

$$\begin{array}{ll}
& \mathrm{val}_I(0sh(P_1,P_2,P_3)) = W \\
\text{gdw.} & \mathrm{val}_I(sh(P_1,P_2,P_3)) = F \\
\text{gdw.} & \mathrm{val}_I((P_1 \to P_3) \wedge (\neg P_1 \to P_2)) = F \\
\text{gdw.} & \mathrm{val}_I((\neg P_1 \vee P_3) \wedge (P_1 \vee P_2)) = F \\
\text{gdw.} & \mathrm{val}_I(\neg P_1 \vee P_3) = F \text{ oder } \mathrm{val}_I(P_1 \vee P_2) = F \\
\text{gdw.} & \mathrm{val}_I(\neg P_1) = F \text{ und } \mathrm{val}_I(P_3) = F \text{ oder } \mathrm{val}_I(P_1) = F \text{ und } \mathrm{val}_I(P_2) = F \\
\text{gdw.} & \mathrm{val}_I(1P_1) = W \text{ und } \mathrm{val}_I(0P_3) = W \text{ oder } \mathrm{val}_I(0P_1) = W \text{ und } \mathrm{val}_I(0P_2) = W
\end{array}$$

Zu Aufgabe 6

(a) **Signatur:** F Flugreise,
V Vollpension,
M Meer,
P Pool

Aussagen:

- Falls sie nicht mit dem Flugzeug fliegen, besteht der Vater auf Vollpension am Meer:

$$\neg F \to (V \wedge M)$$

- Die Mutter möchte mindestens einen ihrer drei Wünsche erfüllt sehen: ans Meer fliegen, oder am Meer aber ohne Pool, oder Vollpension und Pool:

$$(M \wedge F) \vee (M \wedge \neg P) \vee (V \wedge P)$$

- Gibt es keinen Pool, so besteht Tochter Lisa auf einer Flugreise und Urlaub am Meer und darauf daß keine Vollpension gebucht wird.

$$\neg P \to (F \wedge M \wedge \neg V)$$

- Auch dem Baby soll einer seiner Wünsche erfüllt werden: erstens einen Pool und nicht fliegen oder zweitens Vollpension, dann aber ohne Pool.

$$(P \wedge \neg F) \vee (V \wedge \neg P)$$

Ist diese Formelmenge erfüllbar? Das ist genau dann der Fall, wenn es kein geschlossenes Tableau für

$$\begin{array}{ll}
A := 1 & (\neg F \to (V \wedge M)) \wedge \\
& ((M \wedge F) \vee (M \wedge \neg P) \vee (V \wedge P)) \wedge \\
& (\neg P \to (F \wedge M \wedge \neg V)) \wedge \\
& ((P \wedge \neg F) \vee (V \wedge \neg P))
\end{array}$$

gibt. Mann kann wie in Aufgabe 4 eine erfüllende Belegung angeben, die den Urlaub der Familie beschreibt.

(b) Abbildung 2 zeigt ein erschöpftes Tableau für diese Formelmenge. Die Abbildung wurde mit dem Applet von der Homepage erstellt. Der orange markierte Ast ist nicht geschlossen und jede mögliche Erweiterung wurde auf ihn angewendet. Aus ihm kann man folglich eine erfüllende Belegung der Ausgangsformeln ablesen. Dies geschieht aus den orange hienterlegten Knoten und ergibt die (einzig mögliche Belegung):

$$I(V) = W, I(P) = W, I(F) = F, I(M) = W$$

Die Wünsche der Familie sind erfüllbar und der Urlaub sieht folgendermaßen aus:

> Die Familie verbringt den Urlaub am **Meer** in einem Hotel mit **Vollpension** und **Pool**. Allerdings ist es **keine Flugreise**.

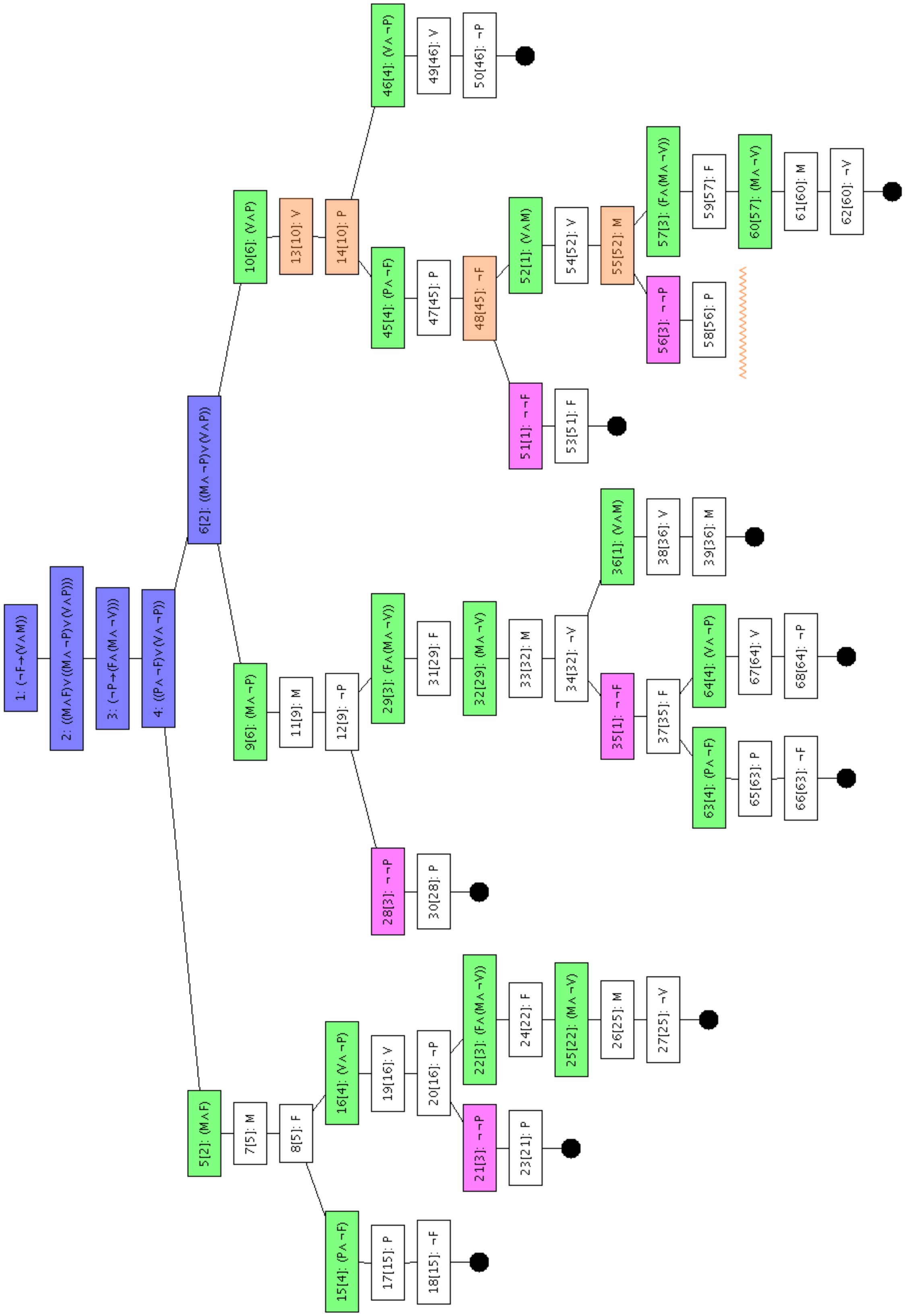


Abbildung 2: Tableau zu Aufgabe 6