UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. B. Beckert
M. Ulbrich

Formale Systeme, WS 2008/2009

Übungsblatt 9

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 23.01.2009 besprochen.

Aufgabe 1

Gegeben sei die prädikatenlogische Signatur $\Sigma_G = (\{\}, \{p\}, \alpha_G)$ mit $\alpha_G(p) = 2$.

Auf Übungsblatt 5 wurde in Aufgabe 4 gezeigt, dass es keine Menge Z von Formeln in Prädikatenlogik *erster* Stufe geben kann, so dass die Interpretation (D, I) genau dann Modell von Z ist, wenn der Graph $(D, I(p))$ einen Zyklus hat.

Geben Sie eine Formel ϱ über Σ_G in Prädikatenlogik *zweiter* Stufe an (in der nur über einstellige Prädikate quantifiziert wird), so dass die Interpretation (D, I) genau dann Modell von ϱ ist, wenn der Graph $(D, I(p))$ einen Zyklus hat.

Hinweis: Man kann auf der Idee aufbauen, für ein Prädikat $Q(y)$ festzulegen, dass $Q(y)$ wahr sei, wenn y von x erreichbar ist.

Aufgabe 2

Sind die folgenden modallogischen Formeln allgemeingültig? Falls ja, geben Sie eine Begründung; falls nein, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

1. $(\Diamond A \wedge \Diamond B) \to \Diamond(A \wedge B)$
2. $\neg\Diamond\mathbf{0}$
3. $(\Diamond A \to \Diamond\Box A) \leftrightarrow (\Box\Diamond\neg A \to \Box\neg A)$

Aufgabe 3

Beweisen Sie: Die Formel $\Diamond A \to \Box\Diamond A$ charakterisiert die Klasse der euklidischen Kripke-Rahmen (S, R). Ein Kripke-Rahmen ist euklidisch, falls folgendes gilt:

Für alle Zustände $x, y, z \in S$ gilt: falls $R(x, y)$ und $R(x, z)$, dann $R(y, z)$.

— bitte wenden —

Aufgabe 4

Sind die folgenden modallogischen Formeln in allen Kripke-Strukturen (S, R, I) gültig, deren Erreichbarkeitsrelation R eine Äquivalenzrelation ist? Falls ja, geben Sie eine Begründung; falls nein, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

1. $\Box A \leftrightarrow \Box\Box A$
2. $\Box A \rightarrow \Diamond A$
3. $\Box\Diamond A \rightarrow \Diamond\Box A$
4. $\Diamond A \leftrightarrow \Box\Diamond A$

Aufgabe 5

Modallogische Formeln können auf prädikatenlogische Formeln abgebildet werden, indem man jeder modallogischen Variablen p ein einstelliges Prädikat $p(\cdot)$ zuordnet und außerdem die Zugänglichkeitsrelation der Kripkestruktur als zweistelliges Prädikat $r(\cdot, \cdot)$ darstellt.

Geben Sie eine rekursive Definition dieser Abbildung, die modallogische Formeln φ auf prädikatenlogische Formeln φ' abbildet.

Geben Sie auch an, wie jeder Kripkestruktur $\mathcal{K}$ eine prädikatenlogische Interpretation $\mathcal{K}' = (D_{\mathcal{K}'}, I_{\mathcal{K}'})$ zuzuordnen ist, so dass – wie beabsichtigt – gilt:

$$\mathcal{K} \models \varphi \qquad \text{gdw.} \qquad \mathcal{K}' \models \varphi' \ .$$