2. Zwischenklausur Formale Systeme

Universität Karlsruhe
Fakultät für Informatik

WS 2008/2009

Prof. Dr. Bernhard Beckert

29. Januar 2009

Name: ______________________

Vorname: ______________________

Matrikel-Nr.: ______________________

Bitte geben Sie auf jedem benutzten Blatt rechts oben Ihren Namen und Ihre Matrikel-Nummer an!

Die Bearbeitungszeit beträgt 30 Minuten.

A1 (10)	A2 (11)	A3 (9)	Σ (30)

Bewertungstabelle bitte frei lassen!

Gesamtpunkte:

Name:
Matr.-Nr.:

1 Zur Einstimmung (4+4+2 Punkte)

a. Bitte kreuzen Sie in der folgenden Tabelle das Zutreffende an. Für korrekte Antworten erhalten Sie einen Punkt, für falsche Antworten wird ein Punkt abgezogen. Dabei werden jedoch nie weniger als 0 Punkte für diese Teilaufgabe vergeben. Eine Formel kann mehr als eine der genannten Eigenschaften haben.

	<u>keine</u> Formel der PL1	erfüllbar	allgemeingültig	unerfüllbar
$\exists x\big(p(x) \to (q(x) \to p(c))\big)$		X	X	
$\big(\forall x \exists y\, r(x,y)\big) \to \big(\forall x \exists y\, r(y,x)\big)$		X		
$\big(\forall x\, p(x) \vee \exists z\, \neg p(z)\big) \to \mathbf{0}$				X
$\forall v \forall x(\neg v(x) \vee v(c))$	X	(X in PL2)		

Die Symbole p, q, r sind Prädikatensymbole, c ist ein Konstantensymbol, die übrigen Bezeichner sind Variablen.

b. Bitte kreuzen Sie in der folgenden Tabelle das Zutreffende an. Für korrekte Antworten erhalten Sie einen Punkt, für falsche Antworten wird ein Punkt abgezogen. Dabei werden jedoch nie weniger als 0 Punkte für diese Teilaufgabe vergeben.

	Richtig	Falsch
Jedes lokal konfluente Reduktionssystem ist konfluent.		X
Für jede Menge M geschlossener Formeln der Prädikatenlogik erster Stufe gilt: Wenn eine endliche Teilmenge E von M ein Modell hat, dann hat auch M ein Modell.		X
Für jede prädikatenlogische Formel G gilt: Wenn die Skolemnormalform G_{sk} von G allgemeingültig ist, dann ist G allgemeingültig.	X	
Die Prädikatenlogik zweiter Stufe ist *nicht* kompakt.	X	

c. Die folgenden beiden Termersetzungssysteme über den Funktionssymbolen f, g, a sind *nicht* kanonisch. Geben Sie jeweils eine kurze Begründung, die zeigt, warum nicht.

i.
$$f(x) \doteq g(f(x)) \qquad \text{(i.1)}$$
$$g(y) \doteq f(a) \qquad \text{(i.2)}$$

Dieses Termersetzungssystem ist nicht noethersch wie folgende unendlich fortführbare Ableitungssequenz zeigt:

$$f(a) \overset{(i.1)}{\to} g(f(a)) \overset{(i.1)}{\to} g(g(f(a))) \overset{(i.1)}{\to} g(g(g(f(a)))) \to \dots$$

ii.
$$f(g(x)) \doteq a \qquad \text{(ii.1)}$$
$$g(f(x)) \doteq a \qquad \text{(ii.2)}$$

Dieses Termersetzungssystem ist nicht konfluent: $f(a)$ und a sind beide irreduzibel

$$f(\overbrace{g(f(x))}^{\doteq a}) \xrightarrow{(ii.2)} f(a)$$
$$\underbrace{f(g(f(x)))}_{\doteq a} \xrightarrow{(ii.1)} a$$

2 Tableaukalkül (11 Punkte)

Gegeben sei eine prädikatenlogische Signatur Σ, die das zweistellige Prädikatensymbol p enthält.

a. Geben Sie für die folgenden Aussagen je eine prädikatenlogische Formel über Σ an, die die Aussage formalisiert:

i. $I(p)$ ist eine transitive Relation: $\boxed{\forall x \forall y \forall z (p(x,y) \land p(y,z) \to p(x,z))}$

ii. $I(p)$ ist eine symmetrische Relation: $\boxed{\forall x \forall y (p(x,y) \to p(y,x))}$

iii. $I(p)$ ist endlos: $\boxed{\forall x \exists y\, p(x,y)}$
(jedes x hat einen Nachfolger y mit $I(p)(x,y)$)

iv. $I(p)$ ist reflexiv: $\boxed{\forall x\, p(x,x)}$

b. Zeigen Sie mit Hilfe des prädikatenlogischen Tableaukalküls aus der Vorlesung, dass folgender Satz allgemeingültig ist:

Wenn p transitiv, symmetrisch und endlos ist, dann ist p reflexiv.

Notieren Sie dabei:

- bei jeder Erweiterung, durch welche Regelanwendung eine Formel auf dem Tableau entstanden ist,
- bei Abschlüssen die beiden Partner,
- die schließende Substitution

Verwenden Sie für Ihr Tableau bitte das nächste Blatt

Platz für das Tableau zu Aufgabe 2 b.

$1\forall x.\exists y.p(x,y)$ 1

$1\forall x.\forall y.\forall z.((p(x,y) \land p(y,z)) \to p(x,z))$ 2

$1\forall x.\forall y.(p(x,y) \to p(y,x))$ 3

$0\forall x.p(x,x)$ 4

$0p(sk_1, sk_1)$ 5[δ(4)]

$1\exists y.p(X_1^*, y)$ 6[γ(1)]

$1p(X_1^*, sk_2(X_1^*))$ 7[δ(6)]

$1\forall y.(p(X_1^*, y) \to p(y, X_1^*))$ 8[γ(3)]

$1(p(X_2^*, X_3^*) \to p(X_3^*, X_2^*))$ 9[γ(8)]

- $0p(X_2^*, X_3^*)$ 10[β(9)]
  - $*$ [7,10]
- $1p(X_3^*, X_2^*)$ 11[β(9)]
  - $1\forall y.\forall z.((p(X_4^*, y) \land p(y,z)) \to p(X_4^*, z))$ 12[γ(2)]
  - $1\forall z.((p(X_4^*, X_5^*) \land p(X_5^*, z)) \to p(X_4^*, z))$ 13[γ(12)]
  - $1((p(X_4^*, X_5^*) \land p(X_5^*, X_6^*)) \to p(X_4^*, X_6^*))$ 14[γ(13)]
    - $0(p(X_4^*, X_5^*) \land p(X_5^*, X_6^*))$ 15[β(14)]
      - $0p(X_4^*, X_5^*)$ 17[β(15)]
        - $*$ [7,17]
      - $0p(X_5^*, X_6^*)$ 18[β(15)]
        - $*$ [11,18]
    - $1p(X_4^*, X_6^*)$ 16[β(14)]
      - $*$ [5,16]

Substitution: $\sigma = \{X_1/sk_1, X_2/sk_1, X_3/sk_2(sk_1), X_4/sk_1, X_5/sk_2(sk_1), X_6/sk_1\}$

3 Resolution (9 Punkte)

Zeigen Sie mittels Resolution, dass die Menge folgender Klauseln unerfüllbar ist:

(1) $\{ \neg s(x_1, x_1, y_1),\ \neg q(y_1) \}$

(2) $\{ \neg q(x_2),\ s(f(x_2), f(y_2), y_2) \}$

(3) $\{ \neg r(x_3),\ s(f(x_3), x_3, f(x_3)) \}$

(4) $\{ \neg p(x_4),\ q(x_4),\ r(x_4) \}$

(5) $\{ p(c),\ q(d) \}$

(6) $\{ \neg p(x_6),\ \neg r(x_6) \}$

c und d sind Konstanten, x_i, y_j sind Variablen.

Notieren Sie Ihren Beweis so, dass bei jeder neu entstehenden Klausel klar erkennbar ist, aus welchen Elternklauseln sie entsteht.

(7)	$[1, 2]$	$\{ \neg q(x) \}$
(8)	$[5, 7]$	$\{ p(c) \}$
(9)	$[6, 8]$	$\{ \neg r(c) \}$
(10)	$[4, 9]$	$\{ \neg p(c),\ q(c) \}$
(11)	$[8, 10]$	$\{ q(c) \}$
(12)	$[7, 11]$	$\Box$

Anmerkung: Es ist nicht korrekt, auf zwei Literalen zugleich zu resolvieren. Eine Ableitung wie beispielsweise die Bildung der Resolventen $\{r,\ s\}$ aus $\{p,\ q,\ r\}$ und $\{\neg p,\ \neg q,\ s\}$ ist falsch.