Formale Systeme

Prof. Dr. Bernhard Beckert

Fakultät für Informatik
Universität Karlsruhe (TH)

Winter 2008/2009

Kalküle für die Aussagenlogik

Übersicht

1. Hilbert-Kalkül
2. Resolutionskalkül
3. Tableaukalkül
4. Sequenzenkalkül

Sequenzenkalküle

- 1935 von G. Gentzen eingeführt
- spielen eine zentrale Rolle in der Beweistheorie
- Literatur: J. Gallier. *Logic for Computer Science.* Harper & Row 1986

Sequenzen

Definition

Eine *Sequenz* ist ein Paar endlicher Mengen von Formeln und wird notiert in der Form

$$\Gamma \Rightarrow \Delta.$$

Γ wird Antezedent und Δ Sukzedent genannt.

Sowohl links wie rechts vom Sequenzenpfeil $\Rightarrow$ kann auch die leere Menge stehen. Wir schreiben dann

$$\Rightarrow \Delta \text{ bzw. } \Gamma \Rightarrow \text{ bzw. } \Rightarrow .$$

Sequenzen
Abkürzende Schreibweisen

Ist $\Gamma = \{A_1, \ldots, A_n\}$ und B eine Formel, so schreiben wir

$$\Gamma, B \quad \text{für die Menge} \quad \{A_1, \ldots, A_n, B\},$$

Entsprechend werden

$$B, \Gamma \qquad \Gamma, \Delta \qquad \Gamma, B, \Delta$$

benutzt.

Semantik von Sequenzen

Sei I eine Interpretation.

Definition:Auswertung von Sequenzen

$$\begin{array}{ll} val_I(\Gamma \Rightarrow \Delta) = val_I(\bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta) & \text{für } \Gamma, \Delta \neq \emptyset \\ val_I(\Gamma \Rightarrow) = val_I(\neg \bigwedge \Gamma) & \\ val_I(\Rightarrow \Delta) = val_I(\bigvee \Delta) & \\ val_I(\Rightarrow) = \mathbf{F} & \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \bigwedge \Gamma & = & \text{Konjunktion aller Formeln in } \Gamma \\ \bigvee \Gamma & = & \text{Disjunktion aller Formeln in } \Gamma \end{array}$$

Die Konjunktion über die leere Folge wird demnach zu **W** und die Disjunktion über die leere Folge zu **F** ausgewertet.

Axiome und Regeln

Definition

Axiome:

$$\Gamma, A, \Gamma' \Rightarrow \Delta, A, \Delta'.$$

Die Regeln sind

$$(\neg links)\ \frac{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma, \neg A, \Gamma' \Rightarrow \Delta}$$

$$(\wedge links)\ \frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (A \wedge B), \Gamma' \Rightarrow \Delta}$$

$$(\vee links)\ \frac{\Gamma, A, \Gamma' \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, B, \Gamma' \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (A \vee B), \Gamma' \Rightarrow \Delta}$$

$$(\rightarrow links)\ \frac{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow A, \Delta \quad B, \Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (A \rightarrow B), \Gamma' \Rightarrow \Delta}$$

Regeln (Forts.)

Definition: Fortsetzung

$$(\neg rechts)\ \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A, \Delta'}$$

$$(\wedge rechts)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, \Delta' \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \wedge B), \Delta'}$$

$$(\vee rechts)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \vee B), \Delta'}$$

$$(\rightarrow rechts)\ \frac{A, \Gamma \Rightarrow B, \Delta, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \rightarrow B), \Delta'}$$

Zusätzliche Regeln für eine Menge M von Voraussetzungen

$$(einfügen_M)\ \frac{B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta} \quad \text{für } B \in M$$

Beispiel einer Ableitung im Sequenzenkalkül

an der Tafel!

Ableitbarkeit im Sequenzenkalkül

Definition

Für $A \in For0$, $M \subseteq For0$ sagen wir, dass A *aus* M *ableitbar in* **S**0 ist,

$$M \vdash_S A,$$

gdw.

eine Ableitung von $\Rightarrow A$ aus M in **S**0 existiert.

Korrektheits und Vollständigkeitssatz

Theorem

S0 ist korrekt und vollständig:
es gilt also

$$M \models A \quad \Leftrightarrow \quad M \vdash_{\mathbf{S0}} A.$$

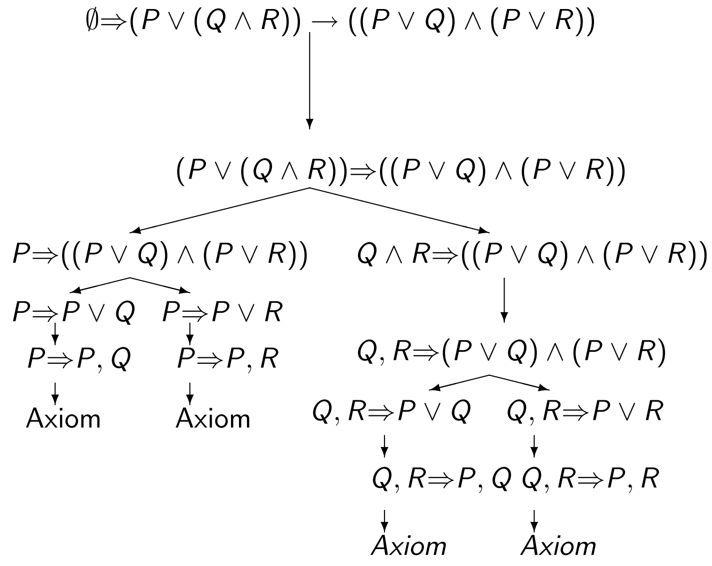
Beweis
Siehe etwa Gallier, 1986.

Beispiel eines Tableau-Beweises

- $0(P \vee (Q \wedge R)) \rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$
  - $1P \vee (Q \wedge R)$
    - $0(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
      - $1P$
        - $0(P \vee Q)$
          - $0P$
            - $0Q$
        - $0(P \vee R)$
          - $0P$
            - $0R$
      - $1(Q \wedge R)$
        - $1Q$
          - $1R$
            - $0(P \vee Q)$
              - $0P$
                - $0Q$
            - $0(P \vee R)$
              - $0P$
                - $0R$

$\mathbf{S}0$-Ableitung von $(P \vee (Q \wedge R)) \rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$

(1)	$P \Rightarrow P, Q$	(Axiom)
(2)	$P \Rightarrow P, R$	(Axiom)
(3)	$Q, R \Rightarrow P, Q$	(Axiom)
(4)	$Q, R \Rightarrow P, R$	(Axiom)
(5)	$P \Rightarrow P \vee Q$	($\vee$ re 1)
(6)	$P \Rightarrow P \vee R$	($\vee$ re 2)
(7)	$Q, R \Rightarrow P \vee Q$	($\vee$ re 3)
(8)	$Q, R \Rightarrow P \vee R$	($\vee$ re 4)
(9)	$P \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$	($\wedge$ re 5,6)
(10)	$Q \wedge R \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$	($\wedge$ re 7,8)
(11)	$(P \vee (Q \wedge R)) \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$	($\vee$ li 9,10)
(12)	$\emptyset \Rightarrow (P \vee (Q \wedge R)) \rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$	($\rightarrow$ re 11)



Transformation von Tableau zu Sequenz

Definition

T ein beliebiges Tableau. Wir definieren einen Ableitungsbaum $Seq(T)$ im Sequenzenkalkül wie folgt:
Bei der Anwendung einer α-Regel beim Aufbau des Tableaus T, werden jeweils zwei Knoten hinzugefügt, der erste und der zweite α-Knoten. Die Knoten von $Seq(T)$ sind alle Knoten von T mit Ausnahme der ersten α Knoten.
Ein Knoten, N, in $Seq(T)$ wird mit der Sequenz

$$A_1, \ldots, A_k \Rightarrow B_1, \ldots B_n$$

markiert, wobei $A_1, \ldots, A_k$ alle Formeln sind, so dass $1A_i$ auf dem Teilpfad P vorkommt, der von N zur Wurzel von T führt und $B_1, \ldots B_n$ alle Formeln sind, so dass $0B_j$ auf P liegt und noch keine Tableauregel auf $1A_i$ und $0B_j$ angewendet wurde.

Transformation von Tableau zu Sequenz

Theorem (Korrektheit der Transformation Seq)

Ist T ein abgeschlossenes Tableau, so ist $Seq(T)$ ein Beweisbaum im Sequenzenkalkül.