Formale Systeme

Prof. Dr. Bernhard Beckert

Fakultät für Informatik
Universität Karlsruhe (TH)

Winter 2008/2009

Shannon Formeln

Shannon Formeln sind aussagenlogische Formeln, die aufgebaut sind aus

- dem dreistelligen Operator *sh*
- den Konstanten 0 und 1
- Aussagevariablen $P_1, \ldots, P_n, \ldots$

Der Wahrheitswerteverlauf von *sh* wird gegeben durch

$$sh(P_1, P_2, P_3) = \begin{cases} P_2 & \text{falls} \quad P_1 = 0 \\ P_3 & \text{falls} \quad P_1 = 1 \end{cases}$$

oder in Tabellenform:

P_1	1	1	1	1	0	0	0	0
P_2	1	1	0	0	1	1	0	0
P_3	1	0	1	0	1	0	1	0
$sh(P_1, P_2, P_3)$	1	0	1	0	1	1	0	0

Eigenschaften des sh-Operators

1. $sh(P_1, P_2, P_3) \leftrightarrow (\neg P_1 \wedge P_2) \vee (P_1 \wedge P_3)$
2. $sh(0, P_2, P_3) \leftrightarrow P_2$
3. $sh(1, P_2, P_3) \leftrightarrow P_3$
4. $sh(P, 0, 1) \leftrightarrow P$
5. $sh(P, 1, 0) \leftrightarrow \neg P$
6. $sh(P_1, P_2, P_2) \leftrightarrow P_2$
7. $sh(sh(P_1, P_2, P_3), P_4, P_5) \quad \leftrightarrow$
   $sh(P_1, sh(P_2, P_4, P_5), sh(P_3, P_4, P_5))$
8. $A \leftrightarrow sh(P, A_{P=0}, A_{P=1})$
9. $\neg sh(A, B, C) \leftrightarrow sh(A, \neg B, \neg C)$

Normierte Shannon Formeln

Wir fixieren eine Ordnung auf der Menge der Aussagevariablen, etwa die durch die Ordnung der Indizes gegebene.

Definition

1. Die Konstanten $0, 1$ sind normierte *sh*-Formeln.
2. $sh(P_i, A, B)$ ist eine normierte *sh*-Formel wenn
   - A und B normierte *sh*-Formeln sind und
   - für jede in A oder B vorkommende Aussagenvariable P_j gilt $j > i$.

Theorem

Zu jeder aussagenlogischen Formel A gibt es eine äquivalente normierte sh-Formel B.

Shannon Graphen

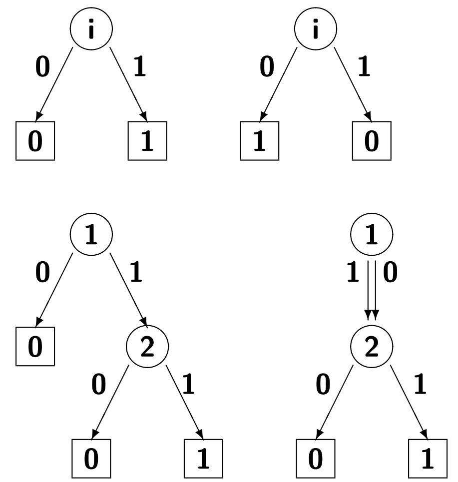
Gegeben sei eine Ordnung $<$ auf der Menge der Aussagevariablen.

Definition

Ein *sh-Graph* ist ein gerichteter, binärer, zusammenhängender Graph.

- Jedem nichtterminalen Knoten v ist eine natürliche Zahl $index(v)$ zugeordnet.
- Von jedem nichtterminalen Knoten v gehen zwei Kanten aus. Eine davon ist mit 0, die andere mit 1 gekennzeichnet.
- Jedem terminalen Knoten v ist eine der Zahlen 0 oder 1 zugeordnet, bezeichnet mit $wert(v)$.
- Ist der nichtterminale Knoten w ein unmittelbarer Nachfolger von v, dann gilt $index(v) < index(w)$.
- Es gibt genau einen Wurzelknoten.

Beispiele von Shannon Graphen



Shannon Graphen vs normierte Shannon Formeln

Es gibt eine offensichtliche Korrespondenz zwischen

Shannon Graphen

und

normierten Shannon Formeln

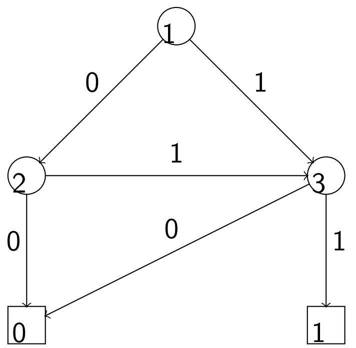
Von jetzt an betrachten wir nur noch Shannon Graphen.

Shannon Graphen und Boolesche Funktionen

- Jedem *sh*-Graphen G kann man eine m-stellige Boolesche Funktion f_G zuordnen, wobei m die Anzahl der in G vorkommenden verschiedenen Indizes $i_1, \ldots, i_m$ ist.
- Wir fassen f_G als eine Funktion mit den Eingabevariabeln $P_{i_1}, \ldots, P_{i_m}$ auf und bestimmen den Funktionswert $f_G(P_{i_1}, \ldots, P_{i_m})$, indem wir an der Wurzel von G beginnend einen Pfad durch G wählen. Am Knoten v folgen wir der Kante 0, wenn die Eingabevariable $P_{index(v)}$ den Wert 0 hat, sonst der Kante 1.
- Der Wert des terminalen Knotens ist dann der gesuchte Funktionswert.

Shannongraph als Boolesche Funktion

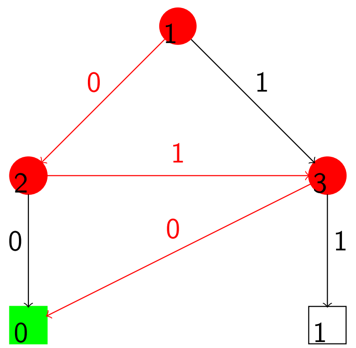
G:



$f_G(0,1,0) = ?$

Shannongraph als Boolesche Funktion

G:



$f_G(0,1,0) = ?0$

Reduzierte Shannon Graphen

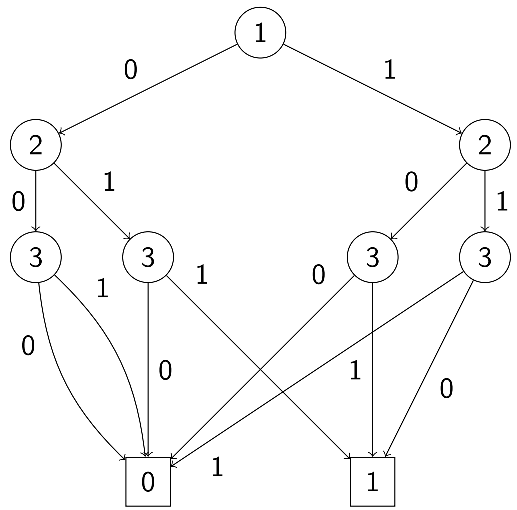
Definition

Ein *sh*-Graph heißt *reduziert*, wenn

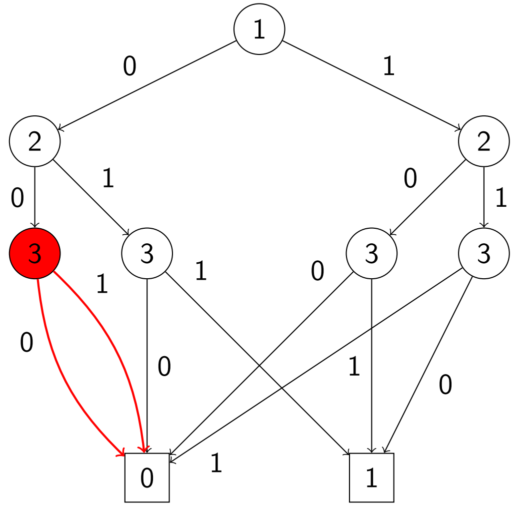
1. es keine zwei Knoten v und w $(v \neq w)$ gibt, so daß der in v verwurzelte Teilgraph G_v mit dem in w verwurzelten Teilgraph G_w isomorph ist.
2. es keinen Knoten v gibt, so dass die beiden von v ausgehenden Kanten zum selben Nachfolgerknoten führen.

Ein reduzierter Shannongraph heißt auch *ordered binary decision diagram* (OBDD).

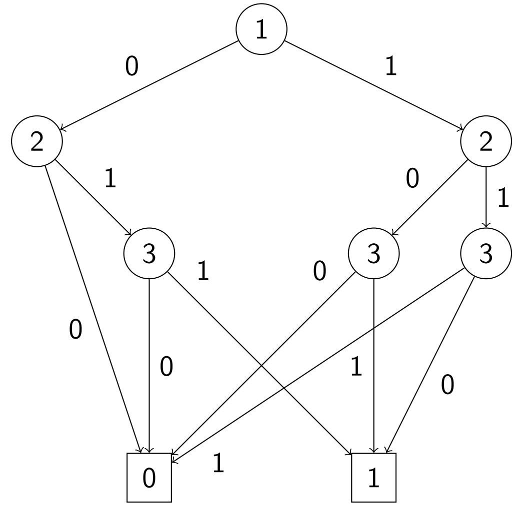
Ein Beispiel



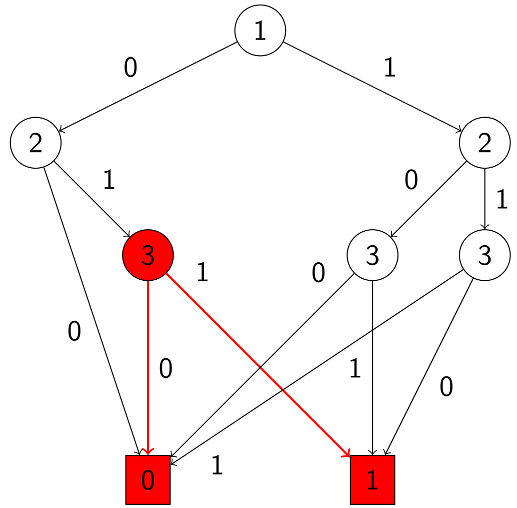
Doppelte Kanten



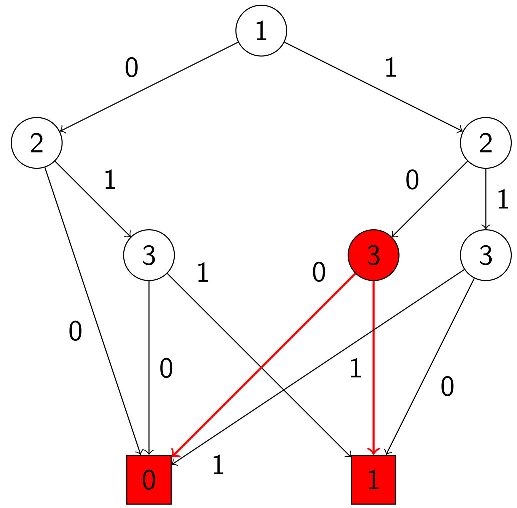
Elimination doppelter Kanten



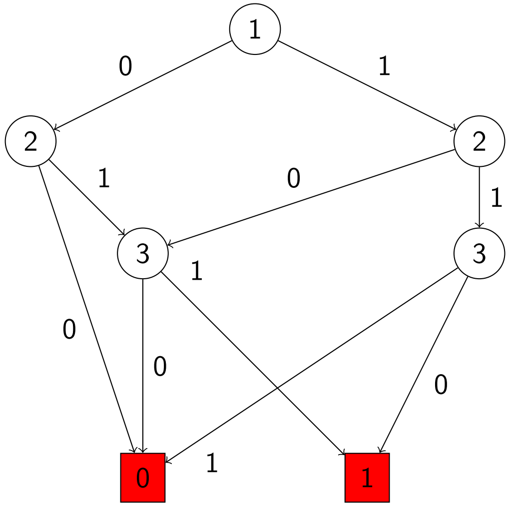
Isomorphe Teilgraphen



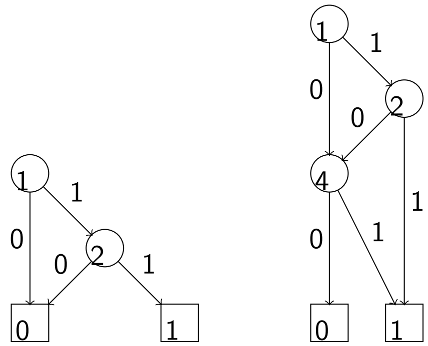
Isomorphe Teilgraphen



Reduktion isomorpher Teilgraphen



Weitere Beispiele



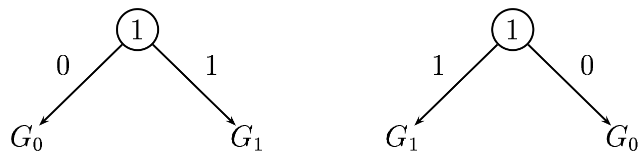
Isomorphie von Shannon Graphen

Definition

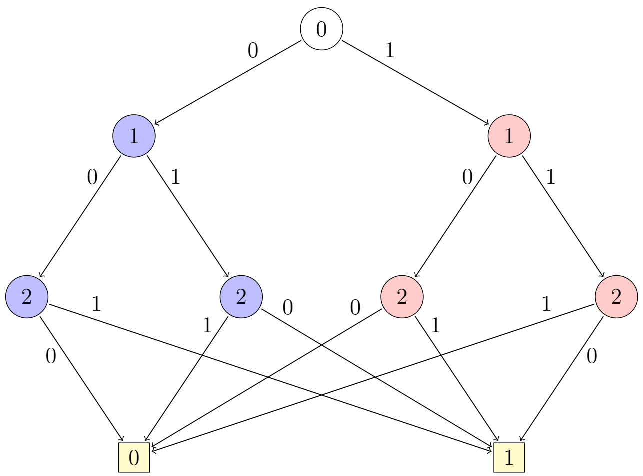
Seien zwei *sh*-Graphen H, G gegeben. Ihre Knotenmengen seien V_1, V_2. H, G heißen zueinander *isomorph* ($H \cong G$) genau dann, wenn es eine bijektive Abbildung π von V_1 nach V_2 gibt mit:

1. $\mathit{index}(k) = \mathit{index}(\pi(k))$ für jeden Nichtterminalknoten $k \in V_1$
2. $\mathit{wert}(k) = \mathit{wert}(\pi(k))$ für jeden Terminalknoten $k \in V_1$
3. Für jeden Nichtterminalknoten $k \in V_1$, dessen 0-Kante/1-Kante zu dem Knoten k_0/k_1 führt, gilt: die 0-Kante von $\pi(k)$ führt zu $\pi(k_0)$, die 1-Kante zu $\pi(k_1)$.

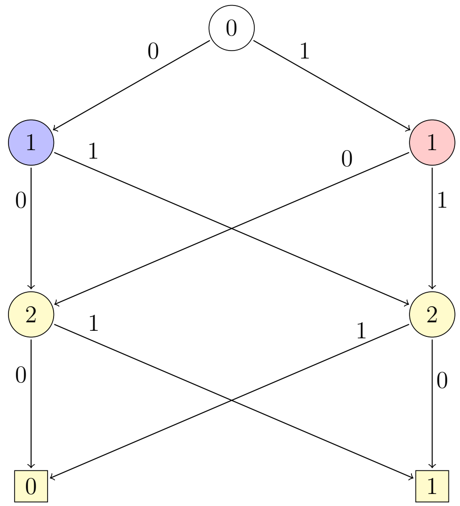
Einfachstes Beipiel isomorpher Shannon Graphen



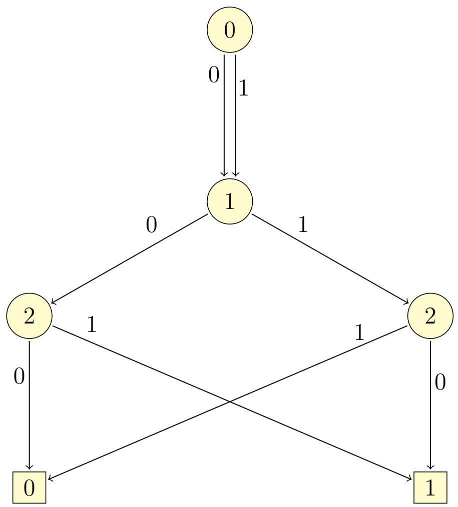
Komplexeres Beipiel isomorpher Shannon Graphen



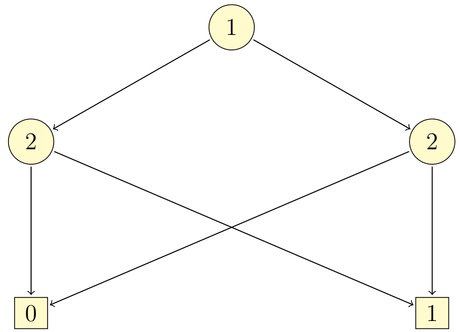
Erste Reduktion



Zweite Reduktion



Letzte Reduktion



Ein Kriterium für Reduziertheit

Theorem

Sei G ein Shannongraph, so daß für jedes Paar von Knoten v, w gilt

wenn	*die 1-Nachfolger von v und w gleich sind und*
	die 0-Nachfolger von v und w gleich sind
dann	$v = w$

Dann erfüllt G die Bedingung (1) aus der Definition reduzierter Shannongraphen, d.h. für jedes Paar x, y von Knoten gilt

wenn	*G_x isomorph zu G_y ist*
dann	$x = y$

Eindeutigkeit reduzierter Shannon Graphen

Theorem

Sind G, H reduzierte sh-Graphen zu $\Sigma = \{P_1, ..., P_n\}$, dann gilt

$$f_G = f_H \Leftrightarrow G \cong H.$$

(Zu jeder Booleschen Funktion f gibt es bis auf Isomorphie genau einen reduzierten sh-Graphen H mit $f = f_H$).

Proof.

$\Leftarrow$ offensichtlich.
$\Rightarrow$ nächste Seiten □

Terminologie

Sei G ein Shannongraph, $i_1, \ldots, i_m$ die in G vorkommenden Knotenmarkierungen und

$$f_G(P_{i_1}, \ldots, P_{i_m}) \mapsto \{0, 1\}$$

die Boolesche Funktion zu G. Einfachheitshalber nehmen wir an

$$f_G(P_1, \ldots, P_m) \mapsto \{0, 1\}$$

$$f_{G,P_i=1}(P_1, \ldots, P_{i-1}, P_{i+1}, \ldots, P_m) = f_G(P_1, \ldots, P_{i-1}, 1, P_{i+1}, \ldots, P_m)$$

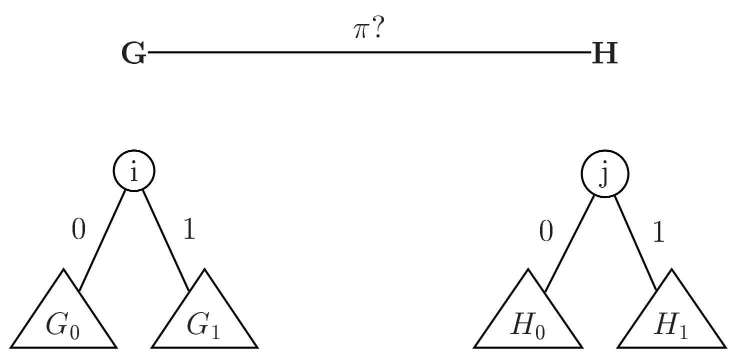
$$f_{G,P_i=0}(P_1, \ldots, P_{i-1}, P_{i+1}, \ldots, P_m) = f_G(P_1, \ldots, P_{i-1}, 0, P_{i+1}, \ldots, P_m)$$

Wir sagen: f_G hängt von P_i ab, wenn

$$f_{G,P_i=1} \neq f_{G,P_i=0}$$

Beweis

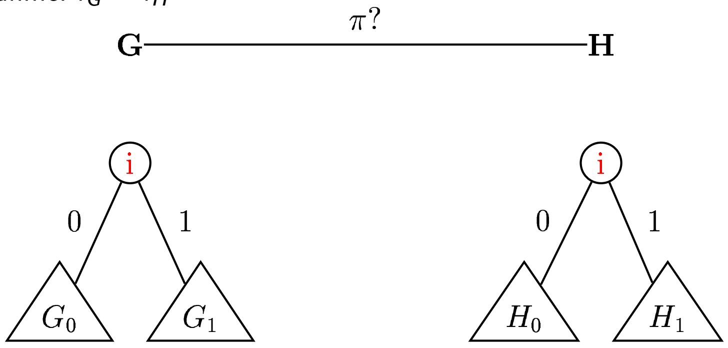
Annahme: $f_G = f_H$



P_i ist die Variable mit dem kleinsten Index, von der f_G abhängt.
P_j ist die Variable mit dem kleinsten Index, von der f_H abhängt.

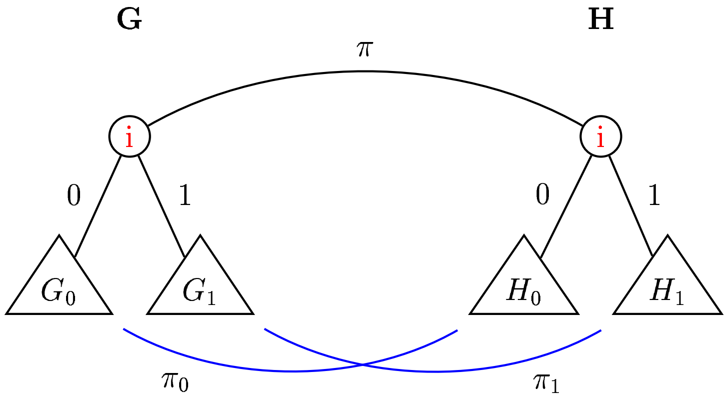
Beweis

Annahme: $f_G = f_H$



Beweis

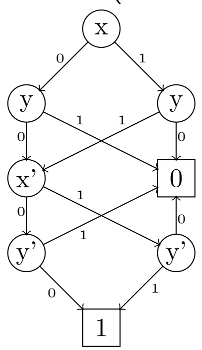
Annahme: $f_G = f_H$



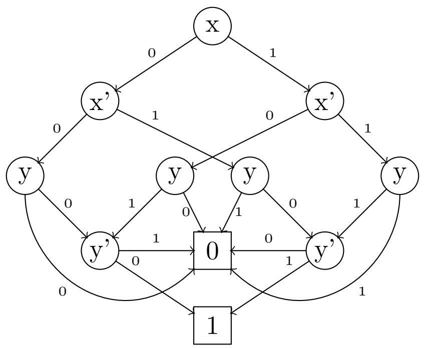
Induktionsvoraussetzung

Abhängigkeit von der Variablenordnung

Zwei BDDs für $(x \longleftrightarrow y) \wedge (x' \longleftrightarrow y')$



Ordnung: $x < y < x' < y'$



Ordnung: $x < x' < y < y'$

Eine harte Nuß

[BDD für Multiplikationen]

- X enthalte $2k$ Variablen $\{x_0, \ldots, x_{k-1}, y_0, \ldots, y_{k-1}\}$
- $x = x_0 \ldots x_{k-1}$ und $y = y_0 \ldots y_{k-1}$ bezeichnen k-stellige Binärzahlen.
- für $0 \leq i < 2k$ bezeichne $Mult_i$ die boolsche Funktion, die das i-te Bit des Produktes von x mit y beschreibt.

Theorem

Für jede Ordnung $<$ der Variablen in X gibt es einen Index $0 \leq i < 2k$, so dass der BDD $B_{Mult_i,<}$ mindestens $2^{k/8}$ Knoten besitzt.