Kriterium von Słupecki

Sei $k > 2$ und H eine Menge von Funktionen auf der Menge $\{0, 1 \ldots k-1\}$ in sich selbst, die alle einstelligen Funktionen umfaßt.

H ist funktional vollständig genau dann, wenn es eine Funktion $f \in H$ gibt, so daß

1. f hängt nicht nur von einer Argumentstelle ab und
2. f ist surjektiv.

Bemerkung

Auch aus diesem Kriterium folgt mit

$$f = \max$$

die funktionale Vollständigkeit der Postschen Logiken

Sheffer's stroke

Wir betrachten die Funktion

$$w(x,y) = (\max(x,y) - 1)(\mathrm{mod}\ m)$$

Offensichtlich gilt

$$w(x,x) \quad = \quad x-1 \quad = \quad s(x)$$

und

$$\begin{aligned} s^{m-1}(w(x,y)) &= s(\ldots s(w(x,y))\ldots) \\ &= \max(x,y) - m \\ &= \max(x,y)(\mathrm{mod}\ m) \end{aligned}$$

Da sich die Basisfunktionen der Postschen Logik durch $w(x,y)$ darstellen lassen, läßt jede Funktion von $\mathcal{M}$ durch $w(x,y)$ darstellen.

Ein weiteres Kriterium

Ist H eine Menge von Funktionen auf $\mathcal{M} = \{0, \ldots, m-1\}$, so heißt eine Teilmenge $N \subseteq \mathcal{M}$ H-abgeschlossen, falls für jede Funktion h in H und jedes Tupel $\bar{n}$ von Elementen aus N auch $h(\bar{n})$ in N liegt.

Für eine beliebige Teilmenge $X \subseteq \mathcal{M}$ ist der H-Abschluß von X die kleinste H-abgeschlossene Menge, die X enthält.

Gegeben sei eine Menge H von Funktionen auf $M = \{0, \ldots, m-1\}$, die $\max$, $\min$ und alle $J_k, 0 \leq k < m$ enthält.

Eine n-stellige Funktion g ist H-definierbar

gdw.

für jedes n-Tupel $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in M^n$ liegt $g(a_1, \ldots, a_n)$ im H-Abschluß von $\{a_1, \ldots, a_n\}$.