UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Institut für Logik, Komplexität und Deduktionssysteme
Prof. Dr. P. H. Schmitt
Dr. B. Beckert

Formale Systeme, WS 2000/2001

Übungsblatt 8

Diese Aufgaben werden in der Übung am 31.01.01 besprochen.

Aufgabe 1

Die Signatur Σ enthalte die Funktionssymbole a, b, c, f, g. Die Termordnung $\succ$ sei die rekursive Pfadordnung, die durch die Ordnung $f > g > c > b > a$ auf den Funktionssymbolen induziert wird.

(a) Vervollständigen Sie das Termersetzungsystem (Σ, E), wobei E aus der einzelnen Gleichung

$$f(f(x)) \doteq g(x,x)$$

besteht.

(b) Vervollständigen Sie das Termersetzungsystem (Σ, E), wobei E aus den drei Gleichung

$$\begin{aligned} c &\doteq a \\ f(x,b) &\doteq x \\ f(b,z) &\doteq c \end{aligned}$$

besteht.

Aufgabe 2

Die Signatur Σ enthalte als einzige Symbole die beiden zweistelligen Prädikate p und q.

Geben Sie eine Formel ϕ der Prädikatenlogik *zweiter* Ordnung über Σ an, so daß eine Interpretation (D, I) genau dann Modell von ϕ ist, wenn $I(q)$ die transitive Hülle von $I(p)$ ist. (Die transitive Hülle einer Relation R ist die kleinste Relation, die R enthält und transitiv ist.)

Hinweis: Gemäß der Definition im Skriptum ist – abweichend von der in der Vorlesung gegebenen Definition – in der Prädikatenlogik zweiter Ordnung neben einer Quantifizierung über Mengenvariablen auch eine Quantifizierung über Relationenvariablen zulässig. Verwenden Sie für diese Aufgabe die Definition aus der Vorlesung. Das heißt, die Formel ϕ darf nur Quantifizierungen über Mengenvariablen und Objektvariablen enthalten.

— **bitte wenden** —

Aufgabe 3

Zeigen Sie, daß die modallogische Formel

$$F \quad = \quad \Box p \to \Box\Box p$$

die Frames mit transitiver Zugänglichkeitsrelation charakterisiert. Das heißt: Die Zugänglichkeitsrelation R eines Frames (S, R) ist genau dann transititiv, wenn die Formel F für alle Interpretationen I in der Kripke-Struktur (S, R, I) gültig ist.

Aufgabe 4

Die Klassen **K** (keine Einschränkung), **T** (reflexiv), **S4** (reflexiv, transitiv) und **S5** (reflexiv, transitivi, symmetrisch) von Kripke-Strukturen bilden eine Hierarchie.

Geben Sie für jede der folgenden modallogischen Formeln G an, welches die allgemeinste Klasse $K \in \{\mathbf{K}, \mathbf{T}, \mathbf{S4}, \mathbf{S5}\}$ ist, in der G noch allgemeingültig ist. Begründen Sie, warum G in allen Strukturen in K gültig ist, und geben Sie ein Gegenbeispiel an, das zeigt, daß G nicht in allen Strukturen der vorhergehenden (weniger allgemeinen) Klasse gilt.

(a) $\Box\Box p \to \Box p$

(b) $\Box p \to \Box\Box p$

(c) $\Diamond\Box p \to \Box p$

Aufgabe 5

Welche der folgenden LTL-Formeln ist in allen linearen Zeitstrukturen gültig? Begründen Sie Ihre Antworten, und geben Sie ggf. ein Gegenbeispiel an.

(a) $C\ \mathit{until}(A \vee B) \ \leftrightarrow\ (C\ \mathit{until}\ A) \vee (C\ \mathit{until}\ B)$

(b) $(A \vee B)\ \mathit{until}\ C \ \leftrightarrow\ (A\ \mathit{until}\ C) \vee (B\ \mathit{until}\ C)$

(c) $(A \wedge B)\ \mathit{since}\ C \ \leftrightarrow\ (A\ \mathit{since}\ C) \wedge (B\ \mathit{since}\ C)$