Aufgabe 1 a

Ordnung: $f > g > c > b > a$

1. Schritt

Gleichung in E: $f(f(x)) \doteq g(x,x)$

Einziges kritische Paar:

$$(g(f(x), f(x)),\ f(g(x,x)))$$

aus Überlagerung von Unterterm $f(x')$ mit $f(f(x))$. MGU: $\{x'/f(x)\}$

Terme

$$\begin{aligned} t &= g(f(x), f(x)) \\ s &= f(g(x,x)) \end{aligned}$$

beide irreduzibel.

Es gilt: $f(g(x,x)) \succ g(f(x), f(x))$

Aufgabe 1 a

Ordnung: $f > g > c > b > a$

2. Schritt

Gleichungen in E:

$$\frac{f(f(x)) \doteq g(x,x)}{f(g(x,x)) \doteq g(f(x), f(x))}$$

Einziges neues kritische Paar:

$$(g(g(x,x), g(x,x)),\ f(g(f(x), f(x))))$$

aus Überlagerung von Unterterm $f(x')$ mit $f(g(x,x))$
MGU: $\{x'/g(x,x)\}$

$t = g(g(x,x), g(x,x))$ **irreduzibel.**

$$\begin{aligned} s = f(g(f(x), f(x))) &\rightarrow^1_E g(f(f(x)), f(f(x))) \\ &\rightarrow^1_E g(g(x,x), g(x,x)) = t \end{aligned}$$

Aufgabe 1 b

Ordnung: $f > g > c > b > a$

1. Schritt

Gleichungen in E:

$$\begin{array}{rcl} c & \doteq & a \\ f(x,b) & \doteq & x \\ f(b,z) & \doteq & c \end{array}$$

Einziges kritisches Paar: (b, c)

Aus Überlagerung von $f(x,b)$ und $f(b,z)$, MGU: $\{x/b, z/b\}$

b **irreduzibel**

$c \to^1_E a$

Es gilt: $b \succ a$

Aufgabe 1 b

Ordnung: $f > g > c > b > a$

2. Schritt

Gleichungen in E:

$$\begin{array}{rcl} c & \doteq & a \\ f(x,b) & \doteq & x \\ f(b,z) & \doteq & c \\ \hline b & \doteq & a \end{array}$$

Erstes kritisches Paar: $(x,\ f(x,a))$

aus Überlagerung von b und $f(x,b)$, MGU $\{\}$

x **und** $f(x,a)$ **irreduzibel**

$f(x,a) \succ x$

Aufgabe 1 b

Ordnung: $f > g > c > b > a$

2. Schritt

Gleichungen in E:

$$\begin{array}{rcl} c & \doteq & a \\ f(x,b) & \doteq & x \\ f(b,z) & \doteq & c \\ \hline b & \doteq & a \end{array}$$

Zweites kritisches Paar: $(c,\ f(a,z))$

aus Überlagerung von b und $f(b,z)$, MGU $\{\}$

$f(a,z)$ **irreduzibel** $c \to_E a$

$f(a,z) \succ a$

Aufgabe 1 b

Ordnung: $f > g > c > b > a$

3. Schritt

Gleichungen in E:

$$\begin{array}{rcl} c & \doteq & a \\ f(x,b) & \doteq & x \\ f(b,z) & \doteq & c \\ b & \doteq & a \\ \hline f(x,a) & \doteq & x \\ f(a,z) & \doteq & a \end{array}$$

Erstes kritisches Paar: (c,b)

aus Überlagerung von $f(x,a)$ und $f(b,z)$, MGU $\{x/b, z/a\}$

$c \to_E a$ **und** $b \to_E a$

Aufgabe 1 b

Ordnung: $f > g > c > b > a$

3. Schritt

Gleichungen in E:

$$\begin{array}{rcl} c & \doteq & a \\ f(x,b) & \doteq & x \\ f(b,z) & \doteq & c \\ b & \doteq & a \\ \hline f(x,a) & \doteq & x \\ f(a,z) & \doteq & a \end{array}$$

Zweites kritisches Paar: (a, a)

aus Überlagerung von $f(a,z)$ und $f(x,b)$, MGU $\{x/a, z/b\}$
bzw. Überlagerung von $f(a,z)$ und $f(x,a)$, MGU $\{x/a, z/a\}$

Also: $G = \emptyset$ und das Verfahren terminiert.

Aufgabe 2

$I(q)$ die Transitive Hülle von $I(p)$

Abkürzungen

M enthält alle von x aus – auch transititv – erreichbaren Elemente

$$\begin{array}{rcl} \psi(M,x) & \equiv & \forall y(p(x,y) \to M(y)) \;\wedge \\ & & \forall y \forall z((M(y) \wedge p(y,z)) \to M(z)) \end{array}$$

M ist Teilmenge von N

$$M \subseteq N \quad \equiv \quad \forall u(M(u) \to N(u))$$

Lösung

$$\forall x \forall M\big((\psi(M,x) \;\wedge\; \forall N(\psi(N,x) \to M \subseteq N)) \;\to \\ \forall y(q(x,y) \leftrightarrow M(y))\big)$$

Aufgabe 3

$F \;=\; \Box p \rightarrow \Box\Box p$ **charakterisiert Transitivität**

F gilt in transitiven Frames

(S, R) **transitiv,** I **beliebig**

$s \in S$ **beliebig**

1. Fall: $s \not\models \Box p$

$s \models F$ **trivial**

Aufgabe 3

$F \;=\; \Box p \rightarrow \Box\Box p$ **charakterisiert Transitivität**

F gilt in transitiven Frames

(S, R) **transitiv,** I **beliebig**

$s \in S$ **beliebig**

2. Fall: $s \models \Box p$

$s' \in S$ **beliebig mit** sRs', $s'' \in S$ **beliebig mit** $s'Rs''$

sRs'' **da** (S, R) **transitiv**

$s'' \models p$ **da** $s \models \Box p$

$s' \models \Box p$ **da** s'' **beliebig** **(falls es kein** s'' **gibt, trivialerweise)**

$s \models \Box\Box p$ **da** s' **beliebig** **(falls es kein** s' **gibt, trivialerweise)**

$s \models F$

Aufgabe 3

$F \;=\; \Box p \to \Box\Box p$ **charakterisiert Transitivität**

Wenn (S,R) nicht transitiv ist, gilt F in (S,R) nicht

(S,R) ***nicht*** **transitiv**

Es gibt Welten s, s', s'' **mit** sRs', $s'Rs''$, **nicht** sRs''

Definiere I durch: $I(p) = S \setminus \{s''\}$

$s \models \Box p$ **da nicht** sRs''

$s' \not\models \Box p$ **da** $s'Rs''$

$s \not\models \Box\Box p$ **da** sRs'

$s \not\models F$

Aufgabe 4 a

$F \;=\; \Box\Box p \to \Box p$

Gilt in T

s **beliebig**

s' **beliebig mit** sRs'

es gelte $s \models \Box\Box p$

$s' \models \Box p$ **da** sRs'

$s' \models p$ **da reflexiv und also** $s'Rs'$

$s \models \Box p$ **da** s' **beliebige**

$s \models F$

Aufgabe 4 a

$F = \Box\Box p \rightarrow \Box p$

Gilt nicht in K

$S = \{s, s', s''\}$

$R = \{(s, s'), (s', s'')\}$

$I(p) = \{s, s''\}$

Aufgabe 4 b

$F = \Box p \rightarrow \Box\Box p$

In Aufgabe 3 bewiesen: F charakterisiert transitive Frames

Gilt in S4

Da alle S4-Frames transitiv sind

Gilt nicht in T

Wähle Frame, der reflexiv aber nicht transitiv ist

Dort gilt F nicht

Aufgabe 4 c

$F = \Diamond\Box p \to \Box p$

Gilt in S5

s beliebig

s' beliebige mit sRs'

es gelte $s \models \Diamond\Box p$

also gibt es s'' mit sRs'' und $s'' \models \Box p$

$s''Rs'$ da sRs', sRs'' und R transitiv, symmetrisch

$s' \models p$

$s \models \Box p$ da s' beliebig

$s \models F$

Aufgabe 4 c

$F = \Diamond\Box p \to \Box p$

Gilt nicht in S4

$S = \{s, s', s''\}$

$R = \{(s,s),\ (s',s'),\ (s'',s''),\ (s,s'),\ (s,s''\}$

$I(p) = \{s, s''\}$

Aufgabe 5 a

Die Formel gilt in allen LTL-Strukturen

Äquivalenzumformungen:

$s \models C \; until \; (A \vee B)$

es gibt $s' > s$ **mit** $t \models C$ **für alle** $s < t < s'$ **und** $s' \models A \vee B$

es gibt $s' > s$ **mit** $t \models C$ **für alle** $s < t < s'$ **und** $s' \models A$ **oder**
es gibt $s' > s$ **mit** $t \models C$ **für alle** $s < t < s'$ **und** $s' \models B$

$s \models C \; until \; A$ **oder**
$s \models C \; until \; B$

$s \models (C \; until \; A) \vee (C \; until \; B)$

Aufgabe 5 b

$(A \vee B) \; until \; C \;\leftrightarrow\; (A \; until \; C) \vee (B \; until \; C)$

Gilt nicht der folgenden LTL-Struktur

$s < t_1 < t_2 < s'$

$t_1 \models A, \neg B$

$t_2 \models \neg A, B$

$s' \models C$

Denn damit:

$s \models (A \vee B) \; until \; C$

aber $s \not\models A \; until \; C$ **und** $s \not\models B \; until \; C$

und also $s \not\models (A \; until \; C) \vee (B \; until \; C)$

Aufgabe 5 c

Die Formel gilt in allen LTL-Strukturen

Äquivalenzumformungen:

$s \models (A \wedge B) \; since \; C$

es gibt $s' < s$ **mit** $t \models A \wedge B$ **für alle** $s' < t < s$ **und** $s' \models C$

es gibt $s' < s$ **mit** $t \models A$ **für alle** $s' < t < s$ **und** $s' \models C$ **und**
es gibt $s' < s$ **mit** $t \models B$ **für alle** $s' < t < s$ **und** $s' \models C$

$s \models A \; since \; C$ **und**
$s \models B \; since \; C$

$s \models (A \; since \; C) \wedge (B \; since \; C)$