UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Institut für Logik, Komplexität und Deduktionssysteme
Prof. Dr. P. H. Schmitt
Dr. B. Beckert

Formale Systeme, WS 2000/2001

Übungsblatt 7

Diese Aufgaben werden in der Übung am 17.01.01 besprochen.

Aufgabe 1

Gegeben sei die Signatur $\Sigma = (\{n, +, s\}, \emptyset, \{n \mapsto 0, + \mapsto 2, s \mapsto 1\})$. Die Gleichungsmenge E bestehe aus folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} s(s(x)) &\doteq x \\ x + n &\doteq x \\ x + s(y) &\doteq s(x+y) \end{aligned}$$

Geben Sie das initiale Modell von E an.

Hinweis: Die intuitive Bedeutung der Symbole ist: „Null“, „plus“, „successor“ (Nachfolger).

Aufgabe 2

Sei Σ eine aussagenlogische Signatur, und sei Γ_Σ die Menge aller aussagenlogischen Formeln über Σ. Ferner sei D_Σ die Menge der Äquivalenzklassen von Γ_Σ bzgl. der Ist-logisch-äquivalent-Relation, d. h.:

$$\begin{aligned} D_\Sigma &= \{[F] \mid F \in \Gamma_\Sigma\} \qquad \text{wobei} \\ [F] &= \{G \mid G \in \Gamma_\Sigma,\ F \leftrightarrow G \text{ ist eine Tautologie}\} \end{aligned}$$

Schließlich sei die Relation $\succ$ auf D_Σ definiert durch:

$$[F] \succ [G] \quad \text{genau dann, wenn} \quad F \to G \text{ eine Tautologie ist.}$$

Beantworten Sie folgende Fragen bzgl. des Reduktionssystems $(D_\Sigma, \succ)$, und begründen Sie Ihre Antworten.

Hinweis: Beachten Sie, daß die Antwort von den Eigenschaften von Σ abhängen kann.

(a) Ist $(D_\Sigma, \succ)$ lokal konfluent?

(b) Ist $(D_\Sigma, \succ)$ konfluent?

(c) Ist $(D_\Sigma, \succ)$ noethersch?

(d) Hat $(D_\Sigma, \succ)$ irreduzible Elemente?

Aufgabe 3

Es sei

$$D = \{a,b\} \cup \{c_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{d_i \mid i \in \mathbb{N}\} \ ,$$

und $\succ$ sei die kleinste Relation mit

$$d_i \succ a,\ d_i \succ c_i,\ c_i \succ d_{i+1},\ c_i \succ b$$

für alle $i \in \mathbb{N}$.

(a) Skizzieren Sie $(D, \succ)$.

(b) Ist $(D, \succ)$ lokal konfluent? Ist $(D, \succ)$ konfluent? Ist $(D, \succ)$ noethersch? Begründen Sie Ihre Antworten.

(c) Geben Sie ein Reduktionssystem $(D', \succ')$ mit *endlichem* D' an, so daß $(D', \succ')$ lokal konfluent aber nicht konfluent ist.

Hinweis: Es genügen vier Elemente.

Aufgabe 4

Die Signatur Σ enthalte die Funktionssymbole $0, d, q, s, +$, und die Menge E bestehe aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}
x + 0 &\doteq x \\
d(0) &\doteq 0 \\
q(0) &\doteq 0 \\
x + s(y) &\doteq s(x + y) \\
d(s(x)) &\doteq s(s(d(x))) \\
q(s(x)) &\doteq q(x) + s(d(x))
\end{aligned}$$

Zeigen Sie mit Hilfe einer rekursiven Pfadordnung (RPO), daß E noethersch ist.

Aufgabe 5

Geben Sie alle (nicht nur bis auf Variablenumbenennung verschiedenen) kritischen Paare des Termersetzungsystems mit den Gleichungen

$$\begin{aligned}
f(g(x), f(x,y)) &\doteq y \\
f(v, g(f(w,v))) &\doteq g(w)
\end{aligned}$$

an.

Hinweis: Es gibt vier solche kritischen Paare. (Dabei sind die trivialen Paare (y,y) und $(g(w), g(w))$ nicht mitgezählt, die genau genommen per Definition auch kritische Paare sind.)