Aufgabe 1

Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} s(s(x)) &\doteq x \\ x+n &\doteq x \\ x+s(y) &\doteq s(x+y) \end{aligned}$$

Lösung: Das initiale Modell ist $(\{0,1\}, I)$ mit

$$\begin{aligned} I(n) &= 0 \\ I(s) &= \{\, 0 \mapsto 1,\ 1 \mapsto 0 \,\} \\ I(+) &= \{\, (0,0) \mapsto 0,\ (0,1) \mapsto 1,\ (1,0) \mapsto 1,\ (1,1) \mapsto 0 \,\} \end{aligned}$$

Aufgabe 2

$[F]$: Äquivalenzklasse von F bzgl. logischer Äquivalenz

$[F] \succ [G]$ gdw. $F \to G$ ist Tautologie und $[F] \neq [G]$

Achtung: Der Zusatz “und $[F] \neq [G]$” fehlt in der Aufgabenstellung

Teilaufgabe a: Ist $(D_\Sigma, \succ)$ lokal konfluent? **Ja.**

Teilaufgabe b: Ist $(D_\Sigma, \succ)$ konfluent? **Ja.**

Sogar:

Für beliebige $[F_1], [F_2] \in D_\Sigma$ gibt es $[G] \in D_\Sigma$ mit

$[F_1] \succ [G]$ und $[F_2] \succ [G]$

nämlich

$[G] = [F_1 \vee F_2]$

Aufgabe 2 (Forts.)

$[F]$: Äquivalenzklasse von F bzgl. logischer Äquivalenz

$[F] \succ [G]$ gdw. $F \to G$ ist Tautologie und $[F] \neq [G]$

Teilaufgabe c: Ist $(D_\Sigma, \succ)$ noethersch? **Kommt drauf an.**

Σ **endlich:** **Ja.**

Denn: D_Σ hat nur endlich viele Elemente

Σ **unendlich:** **Nein.**

Beispiel für unendlich absteigende Kette:

$$[p_1] \to [p_1 \vee p_2] \to [p_1 \vee p_2 \vee p_3] \to \cdots$$

Aufgabe 2 (Forts.)

$[F]$: Äquivalenzklasse von F bzgl. logischer Äquivalenz

$[F] \succ [G]$ gdw. $F \to G$ ist Tautologie und $[F] \neq [G]$

Teilaufgabe d: Hat $(D_\Sigma, \succ)$ irreduzible Elemente? **Ja.**

Genau eines, nämlich: $[\mathit{true}] \in D_\Sigma$

Aufgabe 3 b

$D \;=\; \{a,b\} \cup \{c_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{d_i \mid i \in \mathbb{N}\}$

$d_i \succ a,\; d_i \succ c_i,\; c_i \succ d_{i+1},\; c_i \succ b$

Lokal konfluent? **Ja.**

- $d_i \succ a$, $d_i \succ c_i$, dann auch $a \to a$ und $c_i \to a$
- $c_i \succ d_{i+1}$, $c_i \succ b$, dann auch $d_{i+1} \to b$ und $b \to b$

Aufgabe 3 b

$D \;=\; \{a,b\} \cup \{c_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{d_i \mid i \in \mathbb{N}\}$

$d_i \succ a,\; d_i \succ c_i,\; c_i \succ d_{i+1},\; c_i \succ b$

Konfluent? **Nein.**

$d_1 \to a$ und $d_1 \to b$, aber a und b sind irreduzibel.

Aufgabe 3 b

$D \;=\; \{a,b\} \cup \{c_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{d_i \mid i \in \mathbb{N}\}$

$d_i \succ a,\; d_i \succ c_i,\; c_i \succ d_{i+1},\; c_i \succ b$

Noethersch? **Nein.**

Beispiel für unendlich absteigende Kette:

$d_1 \succ c_1 \succ d_2 \succ c_2 \cdots$

Aufgabe 4

Sei $\succ$ die durch $q > d > + > s > 0$ induzierte RPO

$x + 0 \succ x$ weil x Unterterm von $x + 0$

$d(0) \succ 0$ weil 0 Unterterm von $d(0)$

$q(0) \succ 0$ weil 0 Unterterm von $q(0)$

$x + s(y) \succ s(x+y)$ weil $+ > s$ u. $x + s(y) \succ x + y$
$x + s(y) \succ x + y$ weil $\{x, s(y)\} \succ\!\!\succ \{x, y\}$
$\{x, s(y)\} \succ\!\!\succ \{x, y\}$ weil $s(y) \succ y$
$s(y) \succ y$ weil y Unterterm von $s(y)$

$d(s(x)) \succ s(s(d(x)))$ weil $d > s$ u. $d(s(x)) \succ s(d(x))$
$d(s(x)) \succ s(d(x))$ weil $d > s$ und $d(s(x)) \succ d(x)$
$d(s(x)) \succ d(x)$ weil $\{s(x)\} \succ\!\!\succ \{x\}$
$\{s(x)\} \succ\!\!\succ \{x\}$ weil $s(x) \succ x$
$s(x) \succ x$ weil x Unterterm von $s(x)$

Aufgabe 4

$q(s(x)) \succ q(x) + s(d(x))$ weil $q > +$ und
$\quad q(s(x)) \succ q(x)$ und $q(s(x)) \succ s(d(x))$
$q(s(x)) \succ q(x)$ weil $\{s(x)\} \ggcurly \{x\}$
$\{s(x)\} \ggcurly \{x\}$ weil $s(x) \succ x$
$s(x) \succ x$ weil x Unterterm von $s(x)$
$q(s(x)) \succ s(d(x))$ weil $q > s$ und $q(s(x)) \succ d(x)$
$q(s(x)) \succ d(x)$ weil $q > d$ und $q(s(x)) \succ x$
$q(s(x)) \succ x$ weil x Unterterm von $q(s(x))$

Aufgabe 5

Varianten:

$$\begin{array}{lrcl} E_1: & f(g(x), f(x,y)) & \doteq & y \\ E_1': & f(g(x'), f(x',y')) & \doteq & y' \\ E_2: & f(v, g(f(w,v))) & \doteq & g(w) \\ E_2': & f(v', g(f(w',v'))) & \doteq & g(w') \end{array}$$

Unterterm $f(x',y')$ von l_1' und l_1

MGU: $\{x'/g(x), y'/f(x,y)\}$

Kritisches Paar: $(f(x,y),\ f(g(g(x)),y))$

Unterterm $f(x',y')$ von l_1' und l_2

MGU: $\{x'/v, y'/g(f(w,v))\}$

Kritisches Paar: $(g(f(w,v)),\ f(g(v),g(w)))$

Aufgabe 5

Varianten:

$$\begin{array}{lrcl} E_1: & f(g(x), f(x,y)) & \doteq & y \\ E_1': & f(g(x'), f(x',y')) & \doteq & y' \\ E_2: & f(v, g(f(w,v))) & \doteq & g(w) \\ E_2': & f(v', g(f(w',v'))) & \doteq & g(w') \end{array}$$

Unterterm $f(w',v')$ von l_2' und l_1

MGU: $\{w'/g(x), v'/f(x,y)\}$

Kritisches Paar: $(g(g(x)),\ f(f(x,y),g(y)))$

Unterterm $f(w',v')$ von l_2' und l_2

MGU: $\{w'/v, v'/g(f(w,v))\}$

Kritisches Paar: $(g(v),\ f(g(f(w,v)),g(g(w))))$