UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Institut für Logik, Komplexität und Deduktionssysteme
Prof. Dr. P. H. Schmitt
Dr. B. Beckert

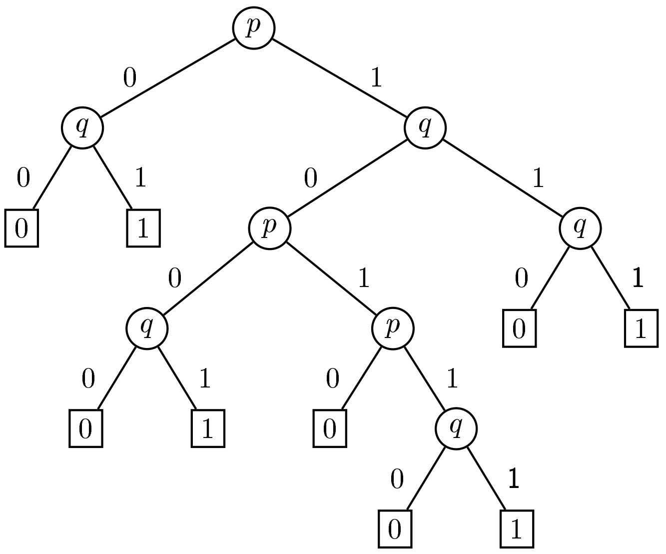
# Formale Systeme, WS 2000/2001

## Übungsblatt 6 (Weihnachtsübungsblatt)

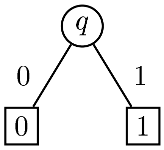
**Diese Aufgaben werden nicht in der Übung besprochen.**

### Aufgabe 1

Geben Sie einen reduzierten Shannon-Graphen für dieselbe aussagenlogische Formel an, die der folgende (nicht geordnete und nicht reduzierte) Graph beschreibt.




Lösung:




### Aufgabe 2

Zeigen Sie mit Hilfe des Tableaukalküls, daß folgende Formel $F$ allgemeingültig ist:

$$(\forall x \forall y (p(x,y) \to q(x,y)) \;\wedge\; \forall x \forall y (r(x,y) \to s(x,y))) \;\;\to$$
$$\forall x \forall y (\exists z (p(x,z) \wedge r(z,y)) \;\to\; \exists u (q(x,u) \wedge s(u,y)))$$

<u>Lösung:</u>

$$\mathbf{0} \quad F$$

$$\mathbf{1} \quad \forall x \forall y (p(x,y) \to q(x,y)) \wedge \forall x \forall y (r(x,y) \to s(x,y))$$

$$\mathbf{0} \quad \forall x \forall y (\exists z (p(x,z) \wedge r(z,y)) \to \exists u (q(x,u) \wedge s(u,y)))$$

$$\mathbf{1} \quad \forall x \forall y (p(x,y) \to q(x,y))$$

$$\mathbf{1} \quad \forall x \forall y (r(x,y) \to s(x,y))$$

$$\mathbf{0} \quad \forall y \exists z (p(a,z) \wedge r(z,y)) \to \exists u (q(a,u) \wedge s(u,y))$$

$$\mathbf{0} \quad \exists z (p(a,z) \wedge r(z,b)) \to \exists u (q(a,u) \wedge s(u,b))$$

$$\mathbf{1} \quad \exists z (p(a,z) \wedge r(z,b))$$

$$\mathbf{0} \quad \exists u (q(a,u) \wedge s(u,b))$$

$$\mathbf{1} \quad p(a,c) \wedge r(c,b)$$

$$\mathbf{1} \quad p(a,c)$$

$$\mathbf{1} \quad r(c,b)$$

$$\mathbf{0} \quad q(a,u_1) \wedge s(u_1,b)$$

$$\begin{array}{cc|cc}
\multicolumn{2}{c|}{\mathbf{0} \quad q(a,u_1)} & \multicolumn{2}{c}{\mathbf{0} \quad s(u_1,b)} \\
\multicolumn{2}{c|}{\mathbf{1} \quad \forall y (p(x_1,y) \to q(x_1,y))} & \multicolumn{2}{c}{\mathbf{1} \quad \forall y (r(x_2,y) \to s(x_2,y))} \\
\multicolumn{2}{c|}{\mathbf{1} \quad p(x_1,y_1) \to q(x_1,y_1)} & \multicolumn{2}{c}{\mathbf{1} \quad r(x_2,y_2) \to s(x_2,y_2)} \\
\mathbf{0} \quad p(x_1,y_1) & \mathbf{1} \quad q(x_1,y_1) & \mathbf{0} \quad r(x_2,y_2) & \mathbf{1} \quad s(x_2,y_2)
\end{array}$$

Das Tableau ist mit der Substitution $\{ x_1/a,\ y_1/c,\ u_1/c,\ x_2/c,\ y_2/b \}$ geschlossen.

— **bitte wenden** —

**Aufgabe 3**

(a) Transformieren Sie das Negat der Formel $F$ aus Aufgabe 2 in Skolem-Normalform (mit Matrix in konjunktiver Normalform).

Hinweis: Transformieren Sie die konjunktiv verknüpften Teilformeln der Negations-Normalform getrennt in Skolem-Normalform.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Resolutionskalküls, daß $F$ allgemeingültig ist.

Lösung:

(a) Skolem-Normalform von

$$\neg((\forall x \forall y(p(x,y) \to q(x,y)) \;\wedge\; \forall x \forall y(r(x,y) \to s(x,y))) \;\;\to \\ \forall x \forall y(\exists z(p(x,z) \wedge r(z,y)) \;\to\; \exists u(q(x,u) \wedge s(u,y))))$$

Negations-Normalform:

$$\forall x \forall y(\neg p(x,y) \vee q(x,y)) \;\wedge\; \forall x \forall y(\neg r(x,y) \vee s(x,y)) \;\wedge \\ \exists x \exists y(\exists z(p(x,z) \wedge r(z,y)) \;\wedge\; \forall u(\neg q(x,u) \vee \neg s(u,y)))$$

Drei konjunktiv verknüpfte Teilformeln:

(i) $\forall x \forall y(\neg p(x,y) \vee q(x,y))$

(ii) $\forall x \forall y(\neg r(x,y) \vee s(x,y))$

(iii) $\exists x \exists y(\exists z(p(x,z) \wedge r(z,y)) \;\wedge\; \forall u(\neg q(x,u) \vee \neg s(u,y)))$

Die ersten beiden Teilformeln sind schon in Skolem-Normalform.

Pränex-Normalform der dritten Teilformel:

$$\exists x \exists y \exists z \forall u(p(x,z) \wedge r(z,y) \wedge (\neg q(x,u) \vee \neg s(u,y)))$$

Nach Skolemisierung:

$$\forall u(p(a,c) \wedge r(c,b) \wedge (\neg q(a,u) \vee \neg s(u,b)))$$

Damit Skolem-Normalform von $\neg F$:

$$\begin{aligned} \forall x \forall y \forall x' \forall y' \forall u(&(\neg p(x,y) \vee q(x,y)) \;\wedge \\ &(\neg r(x',y') \vee s(x',y')) \;\wedge \\ &p(a,c) \;\wedge \\ &r(c,b) \;\wedge \\ &(\neg q(a,u) \vee \neg s(u,b)) \\ &) \end{aligned}$$

(b) Resolutionsbeweis:

$$\cfrac{\cfrac{\{\neg p(x,y), q(x,y)\} \quad \{p(a,c)\}}{\{q(a,c)\}} \quad \{\neg q(a,u), \neg s(u,b)\}}{\{\neg s(c,b)\}} \qquad \cfrac{\{\neg r(x',y'), s(x',y')\} \quad \{r(c,b)\}}{\{s(c,b)\}}$$

$$\cfrac{\{\neg s(c,b)\} \qquad \{s(c,b)\}}{\square}$$

## Aufgabe 4

Die Tiefe $\mathit{tiefe}(t)$ eines Termes $t$ ist als die maximale Schachtelungstiefe von Funktionssymbolen in $t$ definiert. Formaler:

$$\mathit{tiefe}(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t \text{ eine Variable oder Konstante ist} \\ 1 + \max\{\mathit{tiefe}(s_i) \mid 1 \leq i \leq k\} & \text{falls } t = f(s_1, \ldots, s_k) \end{cases}$$

Zeigen Sie: Es ist unentscheidbar, ob eine beliebige prädikatenlogische Formel erfüllbar ist, die keine Terme mit einer Tiefe von mehr als eins enthält (das Gleichheitsprädikat darf vorkommen).

Lösung:

Bekanntlich ist es unentscheidbar, ob eine beliebige prädikatenlogische Formel (ohne die Beschränkung der Termtiefe) erfüllbar ist. Darum genügt es zu zeigen, daß sich jede prädikatenlogische Formel $\phi$ in eine äquivalente prädikatenlogische Formel $\widehat{\phi}$ mit maximaler Termtiefe 1 transformieren läßt.

Die Konstruktion von $\widehat{\phi}$ aus $\phi$ geschieht, indem folgende Transformation so lange wiederholt wird, wie ein Term mit einer Tiefe von mehr als 1 vorkommt:

> Sei $L(\ldots, t, \ldots)$ ein Literal in der Formel, daß einen Term $t$ maximaler Tiefe enthält. Da diese maximale Tiefe größer als 1 ist, gibt es einen Term $s$ in $t = f(\ldots, s, \ldots)$, der keine Konstante oder Variable ist. Das Literal werde durch die Formel
>
> $$\forall x (x \doteq s \to L(\ldots, f(\ldots, x, \ldots), \ldots))$$
>
> ersetzt, wobei $x$ eine nicht in $L(\ldots, t, \ldots)$ vorkommende Variable ist.

Das Verfahren terminiert nach endlich vielen Schritten, denn jedesmal nimmt entweder die maximale Termtiefe ab, oder aber sie bleibt gleich und die Zahl der Vorkommen von Termen mit maximaler Tiefe nimmt ab. Wenn das Verfahren terminiert, kann kein Term mit einer Tiefe von mehr als 1 mehr enthalten sein.

Zudem istm wie leicht zu überprüfen ist, jeder Transformationsschritt äquivalenzerhaltend. Daraus folgt, daß $\widehat{\phi}$ und $\phi$ äquivalent sind.

## Aufgabe 5

Die Signatur $\Sigma$ enthalte die einstelligen Funktionssymbole $v$ (für „Vater von“) und $m$ (für „Mutter von“); $\Sigma$ enthalte keine weiteren Funktionssymbole und keine Prädikatensymbole.

Zeigen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, daß es keine prädikatenlogische Formel $\phi$ über $\Sigma$ gibt, die folgende Aussage formalisiert:

Es gibt niemanden, der sein eigener Vorfahr ist.

Lösung:

Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, es gebe eine solche Formel $\phi$.

Die folgenden Formeln $\psi_n$ $(n \geq 0)$ formalisieren: „Es gibt jemanden, der sein eigener Vorfahr ist, wobei es höchstens $n$ dazwischenliegende Generationen gibt.“ (Die Formeln drücken nur aus, daß es *höchstens* $n$ Generationen sind, weil sie zulassen, daß die $y_i$ gleich sind.)

$$
\begin{aligned}
\phi_n = \exists x \exists y_1 \ldots \exists y_n ( & (x \doteq m(y_1) \vee x \doteq v(y_1)) \wedge \\
& (y_1 \doteq m(y_2) \vee y_1 \doteq v(y_2)) \wedge \\
& \vdots \\
& (y_{n-1} \doteq m(y_n) \vee y_{n-1} \doteq v(y_n)) \wedge \\
& (y_n \doteq m(x) \vee y_n \doteq v(x)))
\end{aligned}
$$

Die Formelmenge $\Gamma$ sei definiert durch:

$$\Gamma = \{\neg\psi_n \mid n \geq 1\} \cup \{\neg\phi\}$$

Jede endliche Teilmenge $\Gamma'$ von $\Gamma$ ist erfüllbar. Sei nämlich $k = \max\{n \mid \phi_n \in \Gamma'\}$. Dann sagen die Formeln in $\Gamma'$ aus: „Es gibt niemanden, der sein eigener Vorfahr mit höchstens $k$ dazwischenliegenden Generationen ist. Und (falls $\neg\phi \in \Gamma'$): „Es gibt jemanden, der sein eigener Vorfahr ist.“ Also ist $\Gamma'$ in einem Modell wahr, in dem es jemanden gibt, der sein eigener Vorfahr mit $k+1$ dazwischenliegenden Generationen ist, und niemanden, der sein eigener Vorfahr mit höchstens $k$ dazwischenliegenden Generationen ist.

Damit ergibt sich ein Widerspruch zum Kompaktheitssatz, denn die Menge $\Gamma$ ist offenbar unerfüllbar.

Also ist unsere Annahme falsch, und es gibt tatsächlich keine Formel $\phi$.