UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Institut für Logik, Komplexität und Deduktionssysteme
Prof. Dr. P. H. Schmitt
Dr. B. Beckert

Formale Systeme, WS 2000/2001

Übungsblatt 5

Diese Aufgaben werden in der Übung am 20.12.00 besprochen.

Aufgabe 1

Geben Sie eine erfüllbare prädikatenlogische Formel F an, so daß für alle Modelle (D, I) von F gilt: das Universum D ist unendlich.

Aufgabe 2

Zeigen Sie mit Hilfe des Tableaukalküls:

(a) $p(0) \;\wedge\; \forall x(p(x) \to p(s(x))) \;\wedge\; \neg p(s(s(0)))$ ist unerfüllbar.

(b) $\forall x(p(x)) \;\to\; (p(a) \wedge p(b))$ ist allgemeingültig.

(c) $((p(a) \wedge p(c)) \wedge (q(b) \wedge q(c))) \;\to\; \exists x(p(x) \wedge q(x))$ ist allgemeingültig.

(d) $\forall x \exists y(p(x) \wedge \neg p(y))$ ist unerfüllbar.

Aufgabe 3

Zeigen Sie mit Hilfe des Sequenzenkalküls:

(a) Die Formel aus Aufgabe 2 (a) ist unerfüllbar.

(b) Die Formel aus Aufgabe 2 (b) ist allgemeingültig.

— **bitte wenden** —

Aufgabe 4

Die Funktion

$$f \;:\; \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

sei wie folgt definiert:

$$f(n) = \max\{|T| \mid \phi \text{ ist eine unerfüllbare prädikatenlogische Formel mit } |\phi| \leq n, \text{ und } T \text{ ist der kleinste Tableaubeweis für die Unerfüllbarkeit von } \phi\}$$

Dabei bezeichnet $|\cdot|$ die Größe einer Formel bzw. eines Beweises.

(a) Begründen Sie, warum f für $n \geq 4$ wohldefiniert ist.

(b) Zeigen Sie, daß die Funktion f nicht berechenbar ist.

Aufgabe 5

Gegeben seien zwei ordnungssortierte Signaturen $\Sigma_i = (S, \leq_i, F, P, \alpha)$ $(i \in \{1,2\})$ mit

$$\begin{aligned} S &= \{S_1, S_2, S_3, S_4\} \\ F &= \{f, a\} \\ P &= \{p\} \\ \alpha &= \{f \mapsto (S_1, S_1),\ a \mapsto S_3,\ p \mapsto (S_1, S_1)\} \end{aligned}$$

Die Signaturen unterscheiden sich in der verwendeten Ordnung auf S. Die Ordnungen sind durch

$$S_2 <_1 S_1,\ \ S_3 <_1 S_1,\ \ S_4 <_1 S_2,\ \ S_4 <_1 S_3$$

bzw.

$$S_2 <_2 S_1,\ \ S_3 <_2 S_1,\ \ S_4 <_2 S_1$$

gegeben. Also ist $(S, <_1)$ einen Verband, während $(S, <_2)$ nur eine Baumstruktur ist.

Überprüfen Sie jeweils, ob die folgenden Atome über der Signatur Σ_1 und/oder über der Signatur Σ_2 unifizierbar sind, und geben Sie ggf. einen allgemeinsten Unifikator an.

(a) $p(x^{S_1}, x^{S_1})$ und $p(y^{S_2}, z^{S_3})$

(b) $p(f(u^{S_3}), u^{S_3})$ und $p(f(x^{S_1}), a)$