Aufgabe 1

Gesucht: Formel, deren Modelle alle unendliches Universum haben

Idee: Formalisiere binäres Prädikat kl ("kleiner"):

– irreflexiv

– transitiv

– hat keine maximalen Elemente hat

$$\begin{array}{c} \forall x(\neg kl(x,x)) \land \\ \forall x \forall y \forall z((kl(x,y) \land kl(y,z)) \to kl(x,z)) \land \\ \forall x \exists y(kl(x,y)) \end{array}$$

Hinweise zum Tableaukalkül

Unbedingt zu beachten

- Richtige Regeln anwenden (Vorzeichen beachten)!
- Beweis der Allgemeingültigkeit von F: starte mit $\mathbf{0}\quad F$
  Beweis der Unerfüllbarkeit von F: starte mit $\mathbf{1}\quad F$
- Bei Instantiierung einer freien Variablen zum Astabschluß:
  alle Vorkommen **gleich** instantiieren
- Bei der Anwendung der δ-Regeln:
  die freien Variablen in den Skolem-Term aufnehmen

Substitutionen instantiieren Variablen
(keine Konstanten, keine komplexen Terme)

Hinweise zum Tableaukalkül

Heuristiken zur Beweiskonstruktion

- Nicht-verzweigende Regeln (α, δ, γ) vor verzweigenden Regeln (β)
- α-, β-, δ-Formeln **einmal pro Ast** verwenden
- Jede γ-Formel **zunächst** einmal pro Ast.
  Wenn dann alle Formeln einmal pro Ast verwendet sind,
  zusätzliche Regelanwendungen auf die γ-Formeln.
- Solche Formeln bevorzugen, die baldigen Astabschluß zulassen
- Varianten derselben γ-Formel auf demselbsen Ast nicht gleich instantiieren.

Aufgabe 2 (a)

[1;–] $\mathbf{1}$ $p(0) \wedge \forall x(p(x) \to p(s(x))) \wedge \neg p(s(s(0)))$

[2;1] $\mathbf{1}$ $p(0)$

[3;1] $\mathbf{1}$ $\forall x(p(x) \to p(s(x))) \wedge \neg p(s(s(0)))$

[4;3] $\mathbf{1}$ $\forall x(p(x) \to p(s(x)))$

[5;3] $\mathbf{1}$ $\neg p(s(s(0)))$

[6;5] $\mathbf{0}$ $p(s(s(0)))$

[7;4] $\mathbf{1}$ $p(x_1) \to p(s(x_1))$

[8;7] $\mathbf{0}$ $p(x_1)$ [9;7] $\mathbf{1}$ $p(s(x_1))$

$*$ (2,8,$\{x_1/0\}$) [10;4] $\mathbf{1}$ $p(x_2) \to p(s(x_2))$

[11;10] $\mathbf{0}$ $p(x_2)$ [12;10] $\mathbf{1}$ $p(s(x_2))$

$*$ (9,11,$\{x_2/s(0)\}$) $*$ (6,12,$\{\}$)

Aufgabe 2 (b)

[1;–] $\mathbf{0}$ $\forall x(p(x)) \rightarrow (p(a) \wedge p(b))$

[2;1] $\mathbf{1}$ $\forall x(p(x))$

[3;1] $\mathbf{0}$ $p(a) \wedge p(b)$

[4;2] $\mathbf{1}$ $p(x_1)$

[5;3] $\mathbf{0}$ $p(a)$	[6;3] $\mathbf{0}$ $p(b)$
$*$ (4,5,$\{x_1/a\}$)	[7;2] $\mathbf{1}$ $p(x_2)$
	$*$ (6,7,$\{x_2/b\}$)

Aufgabe 2 (c)

[1;–] $\mathbf{0}$ $((p(a) \wedge p(c)) \wedge (q(b) \wedge q(c))) \rightarrow \exists x(p(x) \wedge q(x))$

[2;1] $\mathbf{1}$ $(p(a) \wedge p(c)) \wedge (q(b) \wedge q(c))$

[3;1] $\mathbf{0}$ $\exists x(p(x) \wedge q(x))$

[4;2] $\mathbf{1}$ $p(a) \wedge p(c)$

[5;2] $\mathbf{1}$ $q(b) \wedge q(c)$

[6;4] $\mathbf{1}$ $p(a)$

[7;4] $\mathbf{1}$ $p(c)$

[8;5] $\mathbf{1}$ $q(b)$

[9;5] $\mathbf{1}$ $q(c)$

[10;3] $\mathbf{0}$ $p(x_1) \wedge q(x_1)$

[11;10] $\mathbf{0}$ $p(x_1)$	[12;10] $\mathbf{0}$ $q(x_1)$
$*$ (7,11,$\{x_1/c\}$)	$*$ (9,12,$\{\}$)

Aufgabe 2 (d)

[1;–]	$\mathbf{1}$	$\forall x \exists y (p(x) \wedge \neg p(y))$
[2;1]	$\mathbf{1}$	$\exists y (p(x_1) \wedge \neg p(y))$
[3;2]	$\mathbf{1}$	$p(x_1) \wedge \neg p(f(x_1))$
[4;3]	$\mathbf{1}$	$p(x_1)$
[5;3]	$\mathbf{1}$	$\neg p(f(x_1))$
[6;5]	$\mathbf{0}$	$p(f(x_1))$
[7;1]	$\mathbf{1}$	$\exists y (p(x_2) \wedge \neg p(y))$
[8;7]	$\mathbf{1}$	$p(x_2) \wedge \neg p(g(x_2))$
[9;8]	$\mathbf{1}$	$p(x_2)$
[10;8]	$\mathbf{1}$	$\neg p(f(x_2))$

$*$ (6,8,$\{x_2/f(x_1)\}$)

Aufgabe 3 (a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p(0),\ \forall x(p(x) \to p(s(x))) \quad \Rightarrow \quad p(0),\ p(s(s(0))) \qquad (*)}{p(0),\ p(0) \to p(s(0)),\ \forall x(p(x) \to p(s(x))) \quad \Rightarrow \quad p(s(s(0)))}}{p(0),\ \forall x(p(x) \to p(s(x))) \quad \Rightarrow \quad p(s(s(0)))}}{p(0),\ \forall x(p(x) \to p(s(x))),\ \neg p(s(s(0))) \quad \Rightarrow}}{p(0),\ \forall x(p(x) \to p(s(x))) \ \wedge\ \neg p(s(s(0))) \quad \Rightarrow}}{p(0) \ \wedge\ \forall x(p(x) \to p(s(x))) \ \wedge\ \neg p(s(s(0))) \quad \Rightarrow}$$

Ableitung von $(*)$:

$$\dfrac{\dfrac{p(s(0)),\ p(0),\ \forall x(p(x) \to p(s(x))) \quad \Rightarrow \quad p(s(0)),\ p(s(s(0))) \qquad (**)}{p(s(0)),\ p(0),\ p(s(0)) \to p(s(s(0))),\ \forall x(p(x) \to p(s(x))) \quad \Rightarrow \quad p(s(s(0)))}}{p(s(0)),\ p(0),\ \forall x(p(x) \to p(s(x))) \quad \Rightarrow \quad p(s(s(0)))}$$

$(**)$ ist ein Axiom:

$$p(s(s(0))),\ p(s(0)),\ p(0),\ \forall x(p(x) \to p(s(x))) \quad \Rightarrow \quad p(s(s(0)))$$

Aufgabe 3 (b)

$$\dfrac{\dfrac{p(a),\ \forall x(p(x)) \ \Rightarrow\ p(a)}{\forall x(p(x)) \ \Rightarrow\ p(a)} \qquad \dfrac{p(b),\ \forall x(p(x)) \ \Rightarrow\ p(b)}{\forall x(p(x)) \ \Rightarrow\ p(b)}}{\dfrac{\forall x(p(x)) \ \Rightarrow\ p(a) \land p(b)}{\Rightarrow\ \forall x(p(x)) \to (p(a) \land p(b))}}$$

Aufgabe 4 (a)

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$f(n) = \max \underbrace{\{|T| \mid \phi \text{ ist eine unerfüllbare Formel mit } |\phi| \le n, \text{ und } T \text{ ist der kleinste Tableaubeweis für die Unerfüllbk. von } \phi\}}_{=:M}$$

Wohldefiniertheit für $n \geq 4$:

Es gibt mindestens eine unerfüllbare Formel mit $|\phi| \le n$: $p \land \neg p$.

Wegen Größenbeschränkung: es gibt nur endlich viele solcher Formeln

Wegen Vollständigkeit des Kalküls:
Für jede solche Formel gibt es einen Tableaubeweis – und also einen kleinsten.

Also: Für festes n gibt es endlich viele kleinste Beweise für ein ϕ mit $|\phi| \le n$

Darum: M_n ist endlich und nicht leer

Also: $f(n) = \max M_n$ wohldefiniert

Aufgabe 4 (b)

$f(n) = \max\{|T| \mid \phi$ ist eine unerfüllbare Formel mit $|\phi| \leq n$, und
T ist der kleinste Tableaubeweis für die Unerfüllbk. von $\phi\}$

Widerspruchsbeweis – **Annahme:** f berechenbar

Dann wäre Erfüllbarkeit beliebiger prädikatenlogischer Formel ϕ entscheidbar:

1. Bestimme Größe $n_\phi = |\phi|$ der Formel
2. Berechne $t_{max} = f(n_\phi)$
3. Zähle alle möglichen Tableaus T für ϕ mit $|T| \leq t_{max}$ auf (endlich viele)
4. ϕ unerfüllbar gdw. eines davon geschlossen.

Aber: Erfüllbarkeit prädikatenlogischer Formeln ist **unentscheidbar**!

Aufgabe 5

Signaturen

$\Sigma_i = (S, \leq_i, F, P, \alpha) \quad (i \in \{1,2\})$ mit

$$\begin{aligned} S &= \{S_1, S_2, S_3, S_4\} \\ F &= \{f, a\} \\ P &= \{p\} \\ \alpha &= \{f \mapsto (S_1, S_1),\ a \mapsto S_3,\ p \mapsto (S_1, S_1)\} \end{aligned}$$

Ordnungen

$S_2 <_1 S_1,\ \ S_3 <_1 S_1,\ \ S_4 <_1 S_2,\ \ S_4 <_1 S_3$ (Verband)

$S_2 <_2 S_1,\ \ S_3 <_2 S_1,\ \ S_4 <_2 S_1$ (Baumstruktur)

Aufgabe 5 (a)

$p: \quad S_1 \times S_1 \qquad f: \quad S_1 \to S_1 \qquad a: \quad S_3$

$p(x^{S_1}, x^{S_1})$
$p(y^{S_2}, z^{S_3})$

Mit Σ_1: allgemeinster Unifikator: $\{ x^{S_1}/w^{S_4},\ y^{S_2}/w^{S_4},\ z^{S_3}/w^{S_4} \}$
Ergebnis: $p(w^{S_4}, w^{S_4})$

Mit Σ_2: nicht unifizierbar

Aufgabe 5 (b)

$p: \quad S_1 \times S_1 \qquad f: \quad S_1 \to S_1 \qquad a: \quad S_3$

$p(f(u^{S_3}), u^{S_3})$
$p(f(x^{S_1}), a)$

Mit Σ_1 und Σ_2: allgemeinster Unifikator: $\{ x^{S_1}/a,\ u^{S_3}/a \}$
Ergebnis: $p(f(a), a)$