UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Institut für Logik, Komplexität und Deduktionssysteme
Prof. Dr. P. H. Schmitt
Dr. B. Beckert

Formale Systeme, WS 2000/2001

Übungsblatt 4

Diese Aufgaben werden in der Übung am 06.12.00 besprochen.

Aufgabe 1

(a) Betrachten Sie jeweils die folgenden Substitutionen σ und Formeln F. Falls σ für F kollisionsfrei ist, geben Sie $\sigma(F)$ an; andernfalls geben Sie an, wo eine Kollision auftritt.

(i)	$\sigma = \{x/f(g(x), c)\}$	$F = \forall y(p(x, y) \vee \forall z \exists x(f(z, c) \doteq f(c, x)))$
(ii)	$\sigma = \{x/c,\ y/f(c, g(x))\}$	$F = \exists x(p(g(x), f(x, y)) \vee q(x))$
(iii)	$\sigma = \{y/g(x),\ z/g(y)\}$	$F = p(x, y) \rightarrow \exists x(q(f(x, z)) \vee \forall y(q(f(x, y))))$

(b) Betrachten Sie jeweils die folgenden Formeln F und G. Falls sie unifizierbar sind, geben Sie einen allgemeinsten Unifikator μ sowie das Ergebnis $F\mu = G\mu$ der Unifikation an.

(i)	$F = p(x, y)$	$G = p(f(y), f(x))$
(ii)	$F = q(f(f(x, y), x))$	$G = q(f(f(g(c), z), g(z)))$
(iii)	$F = p(x, f(y, x))$	$G = p(f(y, c), f(g(z), f(g(z), c)))$

Aufgabe 2

Geben Sie eine Folge

$$(s_1, t_1),\ (s_2, t_2),\ (s_3, t_3),\ \ldots$$

von Termpaaren an, so daß:

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ sind s_n und t_n unifizierbar.
- Die Größe der Terme s_n und t_n wächst (höchstens) linear in n.
- Die Größe des Ergebnisses $\sigma_n(s_n)$ bzw. $\sigma_n(t_n)$ der Unifikation (σ_n ist ein allgemeinster Unifikator von s_n und t_n) wächst exponentiell in n.

Hinweis: Betrachten Sie die Terme $g(x_1, x_2)$ und $g(c, f(x_1, x_1))$, und verallgemeinern Sie.

Aufgabe 3

Zu einer prädikatenlogischen Formel G in Pränexnormalform bezeichne G_{sko} die durch Skolemisierung (genauer: durch wiederholte Anwendung von Lemma 6.81 im Skriptum) aus G konstruierte Formel in Skolem-Normalform.

(a) Geben Sie jeweils eine prädikatenlogische Formel G in Pränexnormalform an, so daß folgendes gilt:

  (i) $\neg G_{sko} \wedge G$ ist erfüllbar,

  (ii) $\neg G_{sko} \wedge G$ ist unerfüllbar,

  (iii) $G \to G_{sko}$ ist nicht allgemeingültig.

(b) Zeigen Sie, daß $G_{sko} \to G$ für alle prädikatenlogischen Formeln G in Pränexnormalform allgemeingültig ist.

Aufgabe 4

Transformieren Sie die Formel

$$F = \exists y \forall z (p(z,y) \leftrightarrow \neg \exists x (p(z,x) \wedge p(x,z)))$$

in Skolem-Normalform (mit Matrix in konjunktiver Normalform).

Aufgabe 5

(a) Geben Sie eine prädikatenlogische Formel F an, die folgendes formalisiert:

> Daraus, daß
> - es eine gerade Zahl gibt,
> - wenn x eine gerade Zahl ist, auch das Doppelte von x eine gerade Zahl ist, und
> - eine Zahl genau dann gerade ist, wenn sie nicht ungerade ist,
>
> folgt, daß es eine Zahl x gibt, so daß das Doppelte des Doppelten von x nicht ungerade ist.

Verwenden Sie dabei die Prädikatensymbole g (gerade) und u (ungerade) und das Funktionssymbol d (das Doppelte von).

(b) Transformieren Sie das Negat von F in Skolem-Normalform (mit Matrix in konjunktiver Normalform).

(c) Zeigen Sie mit Hilfe des Resolutionskalküls, daß F allgemeingültig ist.

Aufgabe 6

Zeigen Sie mit Hilfe des Tableaukalküls, daß die Formel

$$\forall z \exists y \forall x (p(x,y) \leftrightarrow (p(x,z) \wedge \neg p(x,x))) \;\to\; \neg \exists w \forall y (p(y,w))$$

allgemeingültig ist.