Definition: Kollision

Gegeben:

- Formel A
- Substitution σ

Kollision

Tritt auf, falls:

- x kommt in $\sigma(z)$ vor
- z kommt frei im Wirkungsbereich von $\exists x$, $\forall x$ vor

Aufgabe 1

Teilaufgabe a (i)

$\sigma \;=\; \{x/f(g(x),c)\}$

$F \;=\; \forall y(p(x,y) \lor \forall z \exists x(f(z,c) \doteq f(c,x)))$

Kollisionsfrei (das zweite Vorkommen von x wird nicht ersetzt)

$\sigma(F) \;=\; \forall y(p(\underline{f(g(x),c)}, y) \lor \forall z \exists x(f(z,c) \doteq f(c,x)))$

Teilaufgabe a (ii)

$\sigma \;=\; \{x/c,\; y/f(c,g(x))\}$

$F \;=\; \exists x(p(g(x), f(x, \boxed{y})) \lor q(x))$

Nicht kollisionsfrei, da:
x kommt in $\sigma(y)$ vor.
y kommt im Wirkungsbereich des Quantors $\exists x$ vor.

Aufgabe 1

Teilaufgabe a (iii)

$\sigma \;=\; \{y/g(x),\; z/g(y)\}$

$F \;=\; p(x,y) \to \exists x(q(f(x,z)) \lor \forall y(q(f(x,y))))$

Kollisionsfrei (das zweite Vorkommen von y wird nicht ersetzt)

$\sigma(F) \;=\; p(x, \underline{g(x)}) \to \exists x(q(f(x, \underline{g(y)})) \lor \forall y(q(f(x, \underline{y}))))$

Aufgabe 1

Teilaufgabe b (i)

$F \;=\; p(x,y)$

$G \;=\; p(f(y), f(x))$

nicht unifizierbar

Teilaufgabe b (ii)

$F \;=\; q(f(f(x,y),x))$

$G \;=\; q(f(f(g(c),z),g(z)))$

$\mu \;=\; \{x/g(c),\; y/c,\; z/c\}$

$\mu(F) \;=\; q(f(f(g(c),c),g(c)))$

Aufgabe 1

Teilaufgabe b (iii)

$F \;=\; p(x, f(y, x))$

$G \;=\; p(f(y, c), f(g(z), f(g(z), c)))$

$\mu \;=\; \{x/f(g(z), c),\; y/g(z)\}$

$\mu(F) \;=\; p(f(g(z), c), f(g(z), f(g(z), c)))$

Aufgabe 2: Vorüberlegung

$g(x_1, x_2)$

$g(c, f(x_1, x_1))$

Unifikator: $\{x_1/c,\; x_2/f(c, c)\}$

Ergebnis: $g(c, f(c, c))$

$g(x_1, x_2, x_3)$

$g(c, f(x_1, x_1), f(x_2, x_2))$

Unifikator: $\{x_1/c,\; x_2/f(c, c),\; x_2/f(f(c, c), f(c, c))\}$

Ergebnis: $g(\; c,\;\; f(c, c),\;\; f(f(c, c), f(c, c))\;)$

Aufgabe 2

Lösung

$$\begin{aligned} s_n &:= g(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \\ t_n &:= g(c, f(x_1, x_1), f(x_2, x_2), \ldots, f(x_{n-1}, x_{n-1})) \end{aligned}$$

Größe der Terme

$$\begin{aligned} |s_n| &= n + 1 \\ |t_n| &= 3(n-1) + 2 = 3n - 1 \end{aligned}$$

Allgemeinster Unifikator σ

$$\begin{aligned} \sigma(x_1) &= c \\ \sigma(x_i) &= f(\sigma(x_{i-1}), \sigma(x_{i-1})) \qquad (2 \le i \le n) \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Berechnung der Größe des Ergebnisses

$$\begin{aligned} \sigma(x_1) &= c \\ \sigma(x_i) &= f(\sigma(x_{i-1}), \sigma(x_{i-1})) \qquad (2 \le i \le n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\sigma(x_1)| &= 1 \\ |\sigma(x_i)| &= 1 + 2 \cdot |\sigma(x_{i-1})| \qquad (2 \le i \le n) \end{aligned}$$

$$|\sigma(x_i)| = 2^i - 1 \qquad (1 \le i \le n)$$

Aufgabe 2: Berechnung der Größe des Ergebnisses

$$\begin{aligned}|\sigma(s_n)| = |\sigma(t_n)| &= 1 + \sum_{i=1}^{n} |\sigma(x_i)| \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{n} (2^i - 1) \\ &= 1 + 2^{n+1} - 2 - n \\ &= 2^{n+1} - n - 1\end{aligned}$$

Skolemisierung einer Formel in PNF

Gegeben:

$$\forall x_1 \ldots \forall x_k \exists z\, H(z, x_1, \ldots, x_k)$$

Ergebnis <u>eines</u> Skolemisierungs-Schrittes:

$$\forall x_1 \ldots \forall x_k\, H(f(x_1, \ldots, x_k), x_1, \ldots, x_k) \qquad (f \text{ neu})$$

Wiederhole bis keine Existenzquantoren mehr vorhanden!

Aufgabe 3 a

Teilaufgabe (i)

Gesucht: $\neg G_{sko} \wedge G$ erfüllbar

Lösung: $G = \exists x(p(x))$

Denn: $\neg G_{sko} \wedge G \quad = \quad \neg p(c) \wedge \exists x(p(x))$

Teilaufgabe (ii)

Gesucht: $\neg G_{sko} \wedge G$ unerfüllbar

Lösung: $G = p$

Denn: $\neg G_{sko} \wedge G \quad = \quad \neg p \wedge p$

Aufgabe 3 a

Teilaufgabe (iii)

Gesucht: $G \rightarrow G_{sko}$ nicht allgemeingültig

Lösung: $G = \exists x(p(x))$

Denn: $G \rightarrow G_{sko} \quad = \quad \exists x(p(x)) \rightarrow p(c)$

Aufgabe 3 b

Zu zeigen: $G_{sko} \to G$ allgemeingültig

Beweis:

Sei n die Zahl der Existenzquantoren in G

G_{sko} wird durch n Skolemisierungsschritte aus G konstruiert.

Seien $G_0, \dots, G_n$ die Zwischenergebnisse.

$G_0 = G$ und $G_n = G_{sko}$.

Korollar zu Lemma 6.44: $G_i \to G_{i-1}$ ist allgemeingültig für $1 \le i \le n$.

Transitivität von $\to$: $G_n \to G_0$ ist allgemeingültig.

Damit: $G_{sko} \to G$ ist allgemeingültig.

Aufgabe 4

$$\exists y \forall z (p(z,y) \leftrightarrow \neg \exists x (p(z,x) \land p(x,z)))$$

Transformation in Negationsnormalform ergibt

$$\begin{array}{l} \exists y \forall z ((\neg p(z,y) \lor \forall x(\neg p(z,x) \lor \neg p(x,z))) \ \land \\ \qquad (\ \ p(z,y) \lor \exists x(\ \ p(z,x) \land \ \ p(x,z)))) \end{array}$$

Transformation in Pränexnormalform ergibt

$$\begin{array}{l} \exists y \forall z \forall x \exists u ((\neg p(z,y) \lor \ \neg p(z,x) \lor \neg p(x,z)) \ \land \\ \qquad\qquad (\ \ p(z,y) \lor (\ \ p(z,u) \land \ \ p(u,z)))) \end{array}$$

Skolemisierung ergibt

$$\begin{array}{l} \forall z \forall x ((\neg p(z,c) \lor \ \neg p(z,x) \lor \neg p(x,z)) \ \land \\ \qquad (\ \ p(z,c) \lor (\ \ p(z,f(z,x)) \land \ \ p(f(z,x),z)))) \end{array}$$

Aufgabe 4

$$\begin{array}{l} \forall z \forall x ((\neg p(z,c) \lor \ \neg p(z,x) \lor \neg p(x,z)) \ \land \\ \qquad (\ \ p(z,c) \lor (\ \ p(z,f(z,x)) \land \ \ p(f(z,x),z)))) \end{array}$$

Transformation der Matrix in KNF ergibt

$$\begin{array}{l} \forall z \forall x ((\neg p(z,c) \lor \neg p(z,x) \lor \neg p(x,z)) \ \land \\ \qquad (\ \ p(z,c) \lor p(z,f(z,x))) \ \land \\ \qquad (\ \ p(z,c) \lor p(f(z,x),z))) \end{array}$$

Aufgabe 5 a

$g(x)$: x gerade $u(x)$: x ungerade $d(x)$: das Doppelte von x

Daraus, daß

- es eine gerade Zahl gibt,
- wenn x eine gerade Zahl ist, auch das Doppelte von x eine gerade Zahl ist, und
- eine Zahl genau dann gerade ist, wenn sie nicht ungerade ist,

folgt, daß es eine Zahl x gibt, so daß das Doppelte des Doppelten von x nicht ungerade ist.

$$\begin{array}{l} (\ \exists x(g(x)) \ \land \\ \ \ \forall x(g(x) \to g(d(x))) \ \land \\ \ \ \forall x(g(x) \leftrightarrow \neg u(x)) \\ ) \ \to \ \exists x(\neg u(d(d(x)))) \end{array}$$

Aufgabe 5 b

$\neg F\ =$

$$
\begin{array}{l}
\neg[\ (\quad \exists x(g(x))\ \wedge \\
\qquad \forall x(g(x) \rightarrow g(d(x)))\ \wedge \\
\qquad \forall x(g(x) \leftrightarrow \neg u(x)) \\
\quad)\quad \rightarrow\ \exists x(\neg u(d(d(x)))) \\
\ ]
\end{array}
$$

Transformation in Negationsnormalform:

$$
\begin{array}{l}
\exists x(g(x)) \wedge \\
\forall x(\neg g(x) \vee g(d(x))) \wedge \\
\forall x((g(x) \vee u(x)) \wedge (\neg g(x) \vee \neg u(x))) \wedge \\
\forall x(u(d(d(x))))
\end{array}
$$

Aufgabe 5 b

$$
\begin{array}{l}
\exists x(g(x)) \wedge \\
\forall x(\neg g(x) \vee g(d(x))) \wedge \\
\forall x((g(x) \vee u(x)) \wedge (\neg g(x) \vee \neg u(x))) \wedge \\
\forall x(u(d(d(x))))
\end{array}
$$

Transformation in Pränexnormalform:

$$
\begin{array}{l}
\exists x_1 \forall x_2 \forall x_3 \forall x_4 (g(x_1) \wedge \\
\qquad (\neg g(x_2) \vee g(d(x_2))) \wedge \\
\qquad (g(x_3) \vee u(x_3)) \wedge (\neg g(x_3) \vee \neg u(x_3)) \wedge \\
\qquad u(d(d(x_4))))
\end{array}
$$

Aufgabe 5 b

$$
\begin{array}{l}
\exists x_1 \forall x_2 \forall x_3 \forall x_4 (g(x_1) \wedge \\
\qquad (\neg g(x_2) \vee g(d(x_2))) \wedge \\
\qquad (g(x_3) \vee u(x_3)) \wedge (\neg g(x_3) \vee \neg u(x_3)) \wedge \\
\qquad u(d(d(x_4))))
\end{array}
$$

Skolemisierung:

$$
\begin{array}{l}
\forall x_2 \forall x_3 \forall x_4 (g(c) \wedge \\
\qquad (\neg g(x_2) \vee g(d(x_2))) \wedge \\
\qquad (g(x_3) \vee u(x_3)) \wedge (\neg g(x_3) \vee \neg u(x_3)) \wedge \\
\qquad u(d(d(x_4))))
\end{array}
$$

Aufgabe 5 c

Skolemnormalform von $\neg F$:

$$
\begin{array}{l}
\forall x_2 \forall x_3 \forall x_4 (g(c) \wedge \\
\qquad (\neg g(x_2) \vee g(d(x_2))) \wedge \\
\qquad (g(x_3) \vee u(x_3)) \wedge (\neg g(x_3) \vee \neg u(x_3)) \wedge \\
\qquad u(d(d(x_4))))
\end{array}
$$

Entspricht den Klauseln:

(1) $g(c)$

(2) $\neg g(x) \vee g(d(x))$

(3) $g(x) \vee u(x)$

(4) $\neg g(x) \vee \neg u(x)$

(5) $u(d(d(x)))$

Aufgabe 5 c

(1) $g(c)$

(2) $\neg g(x) \vee g(d(x))$

(3) $g(x) \vee u(x)$

(4) $\neg g(x) \vee \neg u(x)$

(5) $u(d(d(x)))$

Resolutionsbeweis:

(6) $[1,2]$ $g(d(c))$

(7) $[6,2]$ $g(d(d(c)))$

(8) $[4,5]$ $\neg g(d(d(x)))$

(9) $[7,8]$ $\Box$

[1;–] $\mathbf{0}$ $\forall z \exists y \forall x (p(x,y) \leftrightarrow (p(x,z) \wedge \neg p(x,x))) \;\rightarrow\; \neg \exists w \forall y (p(y,w))$

[2;1] $\mathbf{1}$ $\forall z \exists y \forall x (p(x,y) \leftrightarrow (p(x,z) \wedge \neg p(x,x)))$

[3;1] $\mathbf{0}$ $\neg \exists w \forall y (p(y,w))$

[4;2] $\mathbf{1}$ $\exists y \forall x (p(x,y) \leftrightarrow (p(x,z_1) \wedge \neg p(x,x)))$

[5;4] $\mathbf{1}$ $\forall x (p(x,f(z_1)) \leftrightarrow (p(x,z_1) \wedge \neg p(x,x)))$

[6;5] $\mathbf{1}$ $p(x_1,f(z_1)) \leftrightarrow (p(x_1,z_1) \wedge \neg p(x_1,x_1))$

[7;3] $\mathbf{1}$ $\exists w \forall y (p(y,w))$

[8;7] $\mathbf{1}$ $\forall y (p(y,c))$

[9;8] $\mathbf{1}$ $p(y_1,c)$

- [10;6] $\mathbf{1}$ $p(x_1,f(z_1))$
  - [11;6] $\mathbf{1}$ $p(x_1,z_1) \wedge \neg p(x_1,x_1)$
  - [14;11] $\mathbf{1}$ $p(x_1,z_1)$
  - [15;11] $\mathbf{1}$ $\neg p(x_1,x_1)$
  - [16;15] $\mathbf{0}$ $p(x_1,x_1)$
  - $*$ (10,16)
- [12;6] $\mathbf{0}$ $p(x_1,f(z_1))$
  - [13;6] $\mathbf{0}$ $p(x_1,z_1) \wedge \neg p(x_1,x_1)$
    - [17;13] $\mathbf{0}$ $p(x_1,z_1)$
      - $*$ (9,17)
    - [18;13] $\mathbf{0}$ $\neg p(x_1,x_1)$
      - [19;18] $\mathbf{1}$ $p(x_1,x_1)$
      - $*$ (12,19)

Zusatzaufgabe

Geben Sie einen Resolutionsbeweis für die Unerfüllbarkeit der Menge folgender Klauseln an, bei dem (einschließlich der leeren Klausel) **höchstens vier Resolventen** abgeleitet werden:

(1) $\{\, p(c) \,\}$

(2) $\{\, \neg p(x),\ p(f(x)) \,\}$

(3) $\{\, \neg p(f(f(f(f(c))))) \,\}$

Lösung zur Zusatzaufgabe

(1) $\{\, p(c) \,\}$

(2) $\{\, \neg p(x),\ p(f(x)) \,\}$

(3) $\{\, \neg p(f(f(f(f(c))))) \,\}$

Selbstresolution!

(4) $[2,2]$ $\{\, \neg p(x),\ p(f(f(x))) \,\}$

(5) $[4,4]$ $\{\, \neg p(x),\ p(f(f(f(f(x))))) \,\}$

(6) $[1,5]$ $\{\, p(f(f(f(f(c))))) \,\}$

(7) $[3,6]$ $\Box$