UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Institut für Logik, Komplexität und Deduktionssysteme
Prof. Dr. P. H. Schmitt
Dr. B. Beckert

Formale Systeme, WS 2000/2001

Übungsblatt 3

Diese Aufgaben werden in der Übung am 22.11.00 besprochen.

Aufgabe 1

Gegeben sei die Formel

$$F \quad = \quad ((\neg A \to B) \to C) \to ((\neg B \to A) \to C)$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Sequenzenkalküls, daß F allgemeingültig ist.

Aufgabe 2

Zeigen Sie mit Hilfe des Davis-Putnam-Verfahrens, daß die Formel F aus Aufgabe 1 allgemeingültig ist.

Aufgabe 3

Gegeben Sei die Klauselmenge S, die aus den folgenden acht Klauseln besteht:

$$\begin{array}{rcrcr}
P_1 & \vee & P_2 & \vee & P_3 \\
\neg P_1 & \vee & P_2 & \vee & P_3 \\
P_1 & \vee & \neg P_2 & \vee & P_3 \\
\neg P_1 & \vee & \neg P_2 & \vee & P_3 \\
P_1 & \vee & P_2 & \vee & \neg P_3 \\
\neg P_1 & \vee & P_2 & \vee & \neg P_3 \\
P_1 & \vee & \neg P_2 & \vee & \neg P_3 \\
\neg P_1 & \vee & \neg P_2 & \vee & \neg P_3
\end{array}$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Davis-Putnam-Verfahrens, daß S unerfüllbar ist.

— **bitte wenden** —

Aufgabe 4

Gegeben Sei folgender Sachverhalt:

> Eine Familie plant ihren Urlaub. Falls sie nicht mit dem Flugzeug fliegen, besteht der Vater auf Vollpension am Meer. Die Mutter möchte mindestens einen ihrer drei Wünsche erfüllt sehen: ans Meer fliegen, oder am Meer aber ohne Pool, oder Vollpension und Pool. Gibt es keinen Pool, so besteht Tochter Lisa auf einer Flugreise und Urlaub am Meer und darauf daß keine Vollpension gebucht wird. Auch dem Baby soll einer seiner Wünsche erfüllt werden: erstens einen Pool und nicht fliegen oder zweitens Vollpension, dann aber ohne Pool.

(a) Formalisieren Sie die Anforderungen der Famlilie an ihre Urlaubsreise in Aussagenlogik.

Hinweis: Da wir anstreben, die ganze Familie glücklich zu machen, ist es unerheblich, welches Familienmitglied welchen Wunsch äußert, d.h., diese Information muß nicht formalisiert werden.

(b) Geben Sie eine zu Ihrer Formalisierung äquivalente Formel in konjunktiver Normalform an.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe des Tableaukalküls, daß die Familie ans Meer fährt, Vollpension bucht und ein Hotel mit Pool, aber keine Flugreise macht.

Aufgabe 5

Sei Σ eine prädikatenlogische Signatur mit zwei Konstantensymbole k (für „Karl“) und l (für „Lisa“), zwei einstelligen Funktionssymbolen v (für „Vater von“) und m (für „Mutter von“) und zwei zweistelligen Prädikatensymbolen $verw$ (für „verwandt“) und $verh$ (für „verheiratet“). Geben Sie prädikatenlogische Formeln über Σ an, die die folgenden Sachverhalte formalisieren.

(a) Karl ist Großvater.

(b) Karl und Lisa sind verheiratet.

(c) Niemandes Großmutter ist irgend jemandes Vater.

(d) Cousins und Cousinen sind verwandt.

(e) Verwandte zweiten Grades sind nicht verheiratet (nach § 1589 BGB ist der Grad der Verwandschaft gleich der Zahl der die Verwandschaft vermittelnden Geburten).

Hinweis: Das Gleichheitsprädikat $\doteq$ kann verwendet werden.

Aufgabe 6

Sei Σ eine prädikatenlogische Signatur mit einem zweistelligen Prädikatensymbol p. Geben Sie prädikatenlogische Formeln über Σ an, so daß eine Interpretation (D, I) genau dann Modell der jeweiligen Formel ist, wenn der gerichtete Graph, dessen Knoten die Elemente von D sind, und dessen Kanten durch $I(p)$ gegeben sind, die jeweilige Eigenschaft hat.

(a) Der Graph ist symmetrisch.

(b) Der Graph enthält keinen Zyklus der Länge drei.

(c) Der Graph enthält einen 3-Clique (ein n-Clique ist eine (Teil-)Menge C von n verschiedenen Knoten, so daß es für alle $k_1, k_2 \in C$ eine Kante von k_1 nach k_2 gibt).