UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Institut für Logik, Komplexität und Deduktionssysteme
Prof. Dr. P. H. Schmitt
Dr. B. Beckert

Formale Systeme, WS 2000/2001

Übungsblatt 2

Diese Aufgaben werden in der Übung am 08.11.00 besprochen.

Aufgabe 1

Folgende Überlegung ist **falsch**:

F Die kurze konjunktive Normalform einer beliebigen aussagenlo- F
A gischen Formel A läßt sich mit einem Aufwand berechnen, der A
L polynomiell in der Länge von A ist. Sei A' diese kurze konjunk- L
S tive Normalform. Da A' in polynomieller Zeit berechnet werden S
C kann, ist die Länge von A' polynomiell in der Länge von A. Da A' C
H in konjunktiver Normalform ist, kann man eine disjunktive Nor- H
! malform A'' von $\neg A'$ berechnen, indem man A' negiert und durch !
Anwendung der de Morganschen Gesetze die Negation „nach in-
F nen schiebt“. Der Aufwand für die Berechnung von A'' ist linear F
A in A' und damit polynomiell in A, und die Länge von A'' ist A
L polynomiell in der Länge von A. Die Erfüllbarkeit einer Formel L
S in disjunktiver Normalform ist in polynomieller Zeit entscheid- S
C bar. Also ist mit Aufwand, der polynomiell in der Länge von A'' C
H und damit auch polynomiell in der Länge von A ist, entscheid- H
! bar, ob A'' erfüllbar ist. Die Formel A'' ist äquivalent zum Negat !
von A'; also läßt sich mit gleichem Aufwand entscheiden, ob $\neg A'$
F erfüllbar ist. Das Negat $\neg A'$ von A' ist genau dann erfüllbar, F
A wenn A' unerfüllbar ist. Also ist wieder mit gleichem Aufwand A
L entscheidbar, ob A' erfüllbar ist. Die kurze konjunktive Normal- L
S form A' von A ist erfüllbarkeitsäquivalent zu A. Darum kann S
C man dann auch mit gleichem Aufwand entscheiden, ob A erfüll- C
H bar ist. Zusammengefaßt: Man kann für eine beliebige Formel A H
! mit Aufwand, der polynomiell in der Länge von A ist, entscheiden, !
ob A erfüllbar ist. Das Erfüllbarkeitsproblem der Aussangelogik
ist aber NP-vollständig, also gilt P=NP!

(a) Geben Sie an, wo genau der Fehler in der Argumentation steckt.

(b) Geben Sie ein Gegenbeispiel für das fehlerhafte Argument an.

Aufgabe 2 (Shannon-Graphen)

Gegeben Sei die Formel

$$F \quad = \quad (P_1 \vee P_2) \wedge (P_3 \vee P_4) \wedge (P_5 \vee P_6) \ .$$

(a) Geben Sie den reduzierten Shannon-Graphen mit der Variablen-Ordnung

$$P_1 < P_2 < P_3 < P_4 < P_6 < P_6$$

für die Formel F an.

(b) Geben Sie den reduzierten Shannon-Graphen mit der Variablen-Ordnung

$$P_1 < P_3 < P_5 < P_2 < P_4 < P_6$$

für die Formel F an.

Aufgabe 3 (Hilbertkalkül)

Geben Sie eine Ableitung im Hilbertkalkül für folgende allgemeingültige Formel an:

$$((\neg A \to B) \to C) \to ((\neg B \to A) \to C)$$

Hinweis:
Neben den Axiomen, dem Modus Ponens und dem Deduktionstheorem dürfen auch die in Beispiel 4.16 des Skriptums gezeigten Formeln verwendet werden.

Aufgabe 4 (Resolution)

Eine *Krom-Formel* oder *2-KNF-Formel* ist eine Formel in KNF mit der Eigenschaft, daß jede ihrer Klauseln höchstens zwei Literale enthält. Zeigen Sie, daß die Erfüllbarkeit von Krom-Formeln in polynomieller Zeit entscheidbar ist.

Hinweis:
Überlegen Sie, wieviele Resolventen man aus einer beliebigen Krom-Formel erzeugen kann.

Aufgabe 5 (Tableaukalkül)

Zeigen Sie die Allgemeingültigkeit der Formel aus Aufgabe 3 mit Hilfe des Tableaukalküls.

Aufgabe 6 (Tableaukalkül)

Geben Sie Tableaukalkülregeln für den wie folgt definierten dreistelligen Operator par an:

$$val_I(\mathrm{par}(A_1,\ A_2,\ A_3)) = \begin{cases} W & \text{falls } |\{A_i \mid A_i = W,\ i \in \{1,2,3\}\}| \text{ ungerade} \\ F & \text{sonst} \end{cases}$$