Lösungsvorschläge und Erläuterungen

Klausur zur Vorlesung
Grundbegriffe der Informatik
27. Februar 2023

Karlsruher Institut für Technologie

Nachname:	
Vorname:	
Matr.-Nr.:	

INF
Erläuterung siehe unten

Diese Klausur ist mein ☐ 1. Versuch ☐ 2. Versuch in GBI

Email-Adr.:	

nur falls 2. Versuch

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
erreichbare Punkte	9	8	7	8	8	10	10
erreichte Punkte							

Gesamtpunktzahl:			Note:	

INF = Klausur-Version mit 6 LP: Studiengang Informatik, Wirtschaftsinformatik, Wirtschaftsingenieurwesen, Bauingenieurwesen, Mathematik, Technomathematik, Lehramt

PH/GEO = Klausur-Version mit 4 LP: Physik, Geodäsie und Geoinformatik

Wichtige Hinweise

- Stellen Sie sicher, dass Sie die richtige Version der Klausur erhalten haben (INF oder PH/GEO auf der Titelseite)!

- Stellen Sie sicher, dass Ihr Klausur 12 Blätter umfasst.

- Lesen Sie die Aufgaben sorgfältig durch!

- Tragen Sie *nach der Einlesezeit* Ihren Vornamen, Nachnamen und Ihre Matrikelnummer auf dem Titelblatt ein! Tragen Sie Ihre Matrikelnumemr auch auf jedem Blatt ein!

- Wenn Sie Ihre Antwort nicht direkt bei der Aufgabenstellung aufschreiben, vermerken Sie unbedingt, wo Ihre Lösung steht.

- Sie können die Leerseiten und das angehängte freie Blatt für Antworten nutzen, falls der Platz bei der Aufgabenstellung nicht ausreicht.

  Sie können den Platz auch für Notizen, Skizzen etc. nutzen.

  Kennzeichnen Sie deutlich, welche Angaben bewertet werden sollen!

- Weiteres Leerpapier erhalten Sie bei Bedarf auf Nachfrage von der Aufsicht.

- Bitte bleiben Sie bis zum Ende der Bearbeitungszeit am Platz.

- Aufsichtspersonen können nur organisatorische und keine inhaltlichen Fragen beantworten.

Aufgabe 1: Allgemeine Fragen (3 + 1 + 2 + 2 + 1 = 9 Punkte)

/ 9

a) In dieser Teilaufgabe geht es um Adjazenzmatrizen ungerichteter Graphen.

/3

i) Kann die folgende Matrix M die Adjazenzmatrix eines ungerichteten Graphen sein?

Wenn ja, zeichnen Sie den zugehörigen Graphen. Wenn nein, begründen Sie.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ii) Sei nun eine beliebige Matrix $A \in \{0, 1\}^{n \times m}$ mit $n, m \in \mathbb{N}_+$ gegeben. Unter welchen Bedingungen ist A die Adjazenzmatrix eines ungerichteten Graphen?

b) Geben Sie die Wegematrix W eines streng zusammenhängenden gerichteten Graphen mit 4 Knoten an.

/1

$$W = \left(\boxed{} \right)$$

c) Gegeben seien zwei Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ und $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

/2

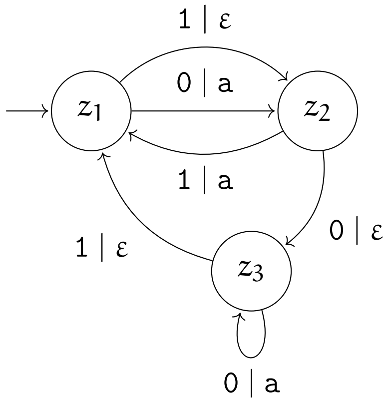
i) Wenn $f \notin O(g)$, dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$, sodass $f(n_0) > g(n_0)$.

/2

ii) Wenn es ein $n_1 \in \mathbb{N}_0$ gibt, sodass $f(n_1) > g(n_1)$, dann ist $f \notin O(g)$.

d) Geben Sie für folgenden Mealy-Automaten ein Wort $w \in \{0, 1\}^*$ der Länge $|w| = 4$ an, sodass die Ausgabe des Automaten $h_{**}(w) = a$ ist.

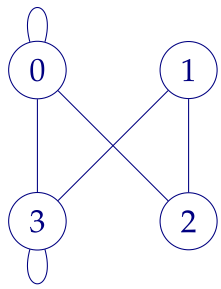
/1



$w =$

Lösung 1

a) $M \in \{0,1\}^{4\times 4}$ ist symmetrisch und kann daher die Adjazenzmatrix eines ungerichteten Graphen sein.



b) Es muss $A = A^T$ gelten.

c) In einem streng zusammenhängenden Graphen ist jeder Knoten von jedem Knoten aus erreichbar. Die Wegematrix $W \in \{0,1\}^{4\times 4}$ besteht also nur aus 1-Einträgen.

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

d) i) Die Aussage ist richtig.
Sei $f \notin O(g)$. Wir müssen zeigen: Es gibt $n_0 \in \mathbb{N}_0$ mit $f(n) > g(n)$.
Es gilt

$$\begin{aligned} f \notin O(g) &\overset{\text{Def.}}{\iff} \neg\exists c \in \mathbb{R}_+ : \exists N \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geq N : f(n) \leq cg(n) \\ &\iff \forall c \in \mathbb{R}_+ : \forall N \in \mathbb{N}_0 : \exists n \geq N : f(n) > cg(n) \end{aligned}$$

Insbesondere gilt also für $c = 1$ und $N = 0$: $\exists n \geq 0 : f(n) > g(n)$.
Nenne den Zeugen dieses Existenzquantors n_0 mit $f(n_0) > g(n_0)$.

ii) Die Aussage ist falsch.
Wähle zum Beispiel $f(n) = n^2 + 1$ und $g(n) = n^2$.
Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$, dass $f(n) > g(n)$, aber offensichtlich ist $f \in \Theta(g)$, und damit auch $f \in O(g)$. f und g erfüllen die Voraussetzungen der Aussage, nicht aber die Folgerung.

e) Die Lösung ist nicht eindeutig. Folgende Wörter haben die geforderte Eigenschaft:

`0011, 1110, 1001, 1010`

(Das a wird dabei im ersten, zweiten, ... Zustandsübergang ausgegeben.)

Aufgabe 2: Prädikatenlogik (1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 = 8 Punkte) / 8

a) Gegeben ist die Signatur $S = (Var, Const, Fun, Rel)$ mit der Stelligkeitsfunktion ar.

$$\begin{aligned} Var &= \{w, x, y, z\} \\ Const &= \{h, b\} \\ Fun &= \emptyset \\ Rel &= \{N\}, \qquad ar(N) = 2 \end{aligned}$$

Wir betrachten eine Interpretation (D, I), in der D eine Menge von Filmtiteln ist. Die Bedeutung der Symbole legt I folgendermaßen fest:

- $(r, s) \in I(N)$ genau dann wenn s ein Nachfolge-Film von r ist.
- $I(h)$ ist der Titel „Herr der Ringe“.
- $I(b)$ ist der Titel „Das Boot“.

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen je als Formel der Prädikatenlogik über der Signatur S. Notieren Sie das Relationssymbol *nicht* in Infix-Schreibweise.

i) Es gibt einen Nachfolge-Film zum Film „Herr der Ringe“, der einen Nachfolge-Film hat. /1

ii) Kein Film ist sein eigener Nachfolge-Film. /1

/1

iii) Jeder Film ist Nachfolger höchstens eines Filmes.

/1

iv) Der Film „Das Boot“ hat weder einen Nachfolger, noch ist er der Nachfolger eines Films.

b) Betrachten wir nun eine Signatur, in der P ein einstelliges Relationssymbol ist und f ein einstelliges Funktionssymbol ist. Gegeben sei Formel

$$F = \exists x \ (P(x) \wedge \neg P(f(x)))$$

und das Universum $D = \{a, b\}$.

/2

i) Geben Sie ein Modell (D, I) der Formel F an.

/2

ii) Geben Sie eine Interpretation (D', I') an, in der F zu falsch ($\mathbf{f}$) auswertet.

Füllen Sie zur Beantwortung die beiden Spalten der folgenden Tabelle mit Werten aus D bzw. Mengen von Werten aus D aus:

i)	ii)
$I(f)(a) =$	$I'(f)(a) =$
$I(f)(b) =$	$I'(f)(b) =$
$I(P) =$	$I'(P) =$

Lösung 2

a) i) $\exists x\, \exists y\, (N(h, x) \wedge N(x, y))$
   ii) $\forall x\, \neg N(x, x)$
   iii) $\forall x \forall y \forall z (N(x, z) \wedge N(y, z) \rightarrow x = y)$
   iv) $\forall x (\neg N(b, x) \wedge \neg N(x, b))$

b) Ein Modell für F ist eine Interpretation, die F wahr macht.

	i)		ii)
$I(f)(a) =$	b	$I'(f)(a) =$	a
$I(f)(b) =$	b	$I'(f)(b) =$	b
$I(P) =$	$\{a\}$	$I'(P) =$	$\emptyset$

Die Lösung ist nicht eindeutig.

Sie können diese Seite für Antworten oder Skizzen und Notizen nutzen.
Notieren Sie dann ggf. bei der Aufgabenstellung, wo die Lösung zu finden ist!

Aufgabe 3: Reguläre Sprachen (2 + 3 + 2 = 7 Punkte)

/ 7

Gegeben ist die kontextfreie Grammatik $G = (\{S, W, X, Y, Z\}, \{a, b\}, S, P)$ mit den Produktionen

$$\begin{aligned} P = \{S &\to XY \mid ZW, \\ X &\to aX \mid a, \\ Y &\to ab, \\ Z &\to Zb \mid \varepsilon, \\ W &\to YW \mid Y\} \ . \end{aligned}$$

a) Geben Sie einen regulären Ausdruck R an, sodass die von R beschriebene Sprache genau die von G erzeugte Sprache ist, also dass $L(R) = L(G)$ gilt.[1]

/2

b) Geben Sie eine **rechtslineare** Grammatik G' mit höchstens fünf Nichtterminalsymbolen an, sodass $L(G') = L(G)$ ist.

Füllen Sie dazu die Leerstellen im angegebenen Tupel aus.

/3

$G' = \Big(\{ \boxed{} \}, \{ \boxed{} \}, \boxed{},$

$\Big\{ \boxed{} \Big\} \Big)$

[1] In früheren Semestern wurde auch $\langle R \rangle$ für die Schreibweise $L(R)$ verwendet.

/2

c) Geben Sie graphisch (d.h. durch Zeichnen) eine **Turingmaschine** über dem Eingabealphabet $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ (und dem Blanksymbol $\square$) mit höchstens fünf Zuständen an, die genau die Sprache $L = \{a^i b^j \mid i \in \mathbb{N}_+, j \in \mathbb{N}_0\}$ akzeptiert.

Lösung 3

a) Lösungsvorschläge:

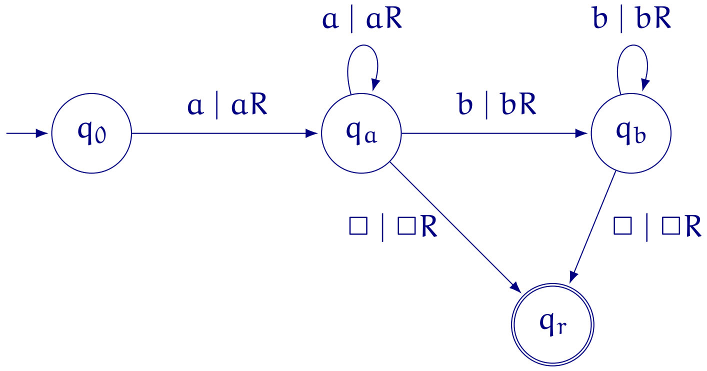
- $aa^*ab \mid b^*(ab)^*ab$
- statt aa^*a kann man natürlich auch aaa^* oder a^*aa schreiben
- statt $(ab)^*ab$ kann man natürlich auch $ab(ab)^*$ oder $a(ba)^*b$ schreiben

b) Lösungsvorschlag, orientiert am regulären Ausdruck $a^*aab \mid b^*(ab)^*ab$:

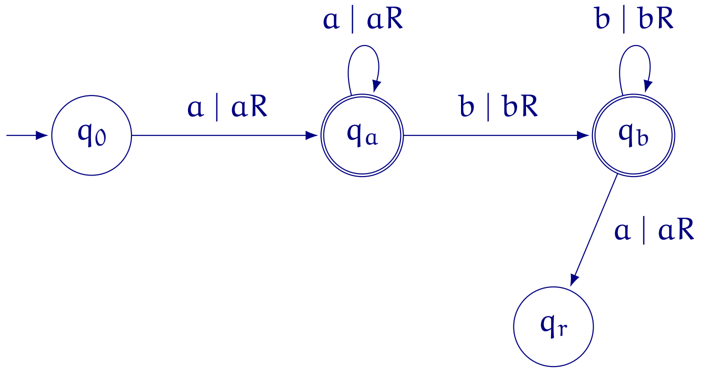
$G' = (\{S, X, Z, W\}, \{a, b\}, S, P)$ mit

$$P = \left\{ \begin{matrix} S \to X \mid Z, \\ X \to aX \mid aab, \\ Z \to bZ \mid W, W \to abW \mid ab \end{matrix} \right\}$$

c)



oder



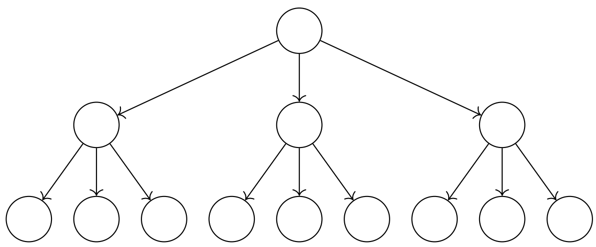
Sie können diese Seite für Antworten oder Skizzen und Notizen nutzen. Notieren Sie dann ggf. bei der Aufgabenstellung, wo die Lösung zu finden ist!

Aufgabe 4: Vollständige Induktion (1 + 5 + 2 = 8 Punkte) / 8

Ein gerichteter Baum $T_n = (V_n, E_n)$ heißt vollständiger Ternärbaum der Höhe n für $n \in \mathbb{N}_0$, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

1. Jeder innere Knoten hat Ausgangsgrad 3.
2. Jeder Pfad von der Wurzel zu einem Blatt hat genau die Länge n.

Die folgende Abbildung zeigt einen vollständigen Ternärbaum T_2 der Höhe 2:



a) Geben Sie eine Formel an, die die Zahl der Knoten in T_n beschreibt. Füllen Sie dazu das folgende Schema aus: /1

$$|V_n| = \sum_{k=\boxed{}}^{\boxed{}} \boxed{}$$

/5

b) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion über der Höhe n:

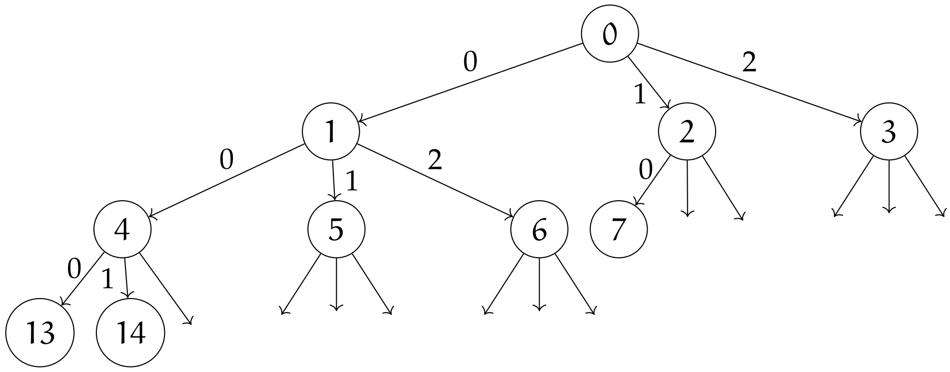
Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: Jeder vollständige Ternärbaum T_n der Höhe n hat genau $|V_n| = \dfrac{3^{n+1} - 1}{2}$ Knoten.

c) Die Knoten und Kanten eines vollständigen Ternärbaums werden nun nach folgendem Schema beschriftet:

/2

1. Die ausgehenden Kanten eines inneren Knotens werden von links nach rechts mit 0, 1 und 2 beschriftet.
2. Die Knoten werden von der Wurzel her bei 0 beginnend aufsteigend durchnummeriert. Dabei werden die Knoten nach Abstand zur Wurzel sortiert und alle Knoten mit demselben Abstand zur Wurzel von links nach rechts beschriftet.

Die folgende Abbildung skizziert die Beschriftungen:



Geben Sie eine induktive Definition der Funktion $n : \mathbb{Z}_3^* \to \mathbb{N}_0$ an, die einem Pfad $p \in \mathbb{Z}_3^*$ (beschrieben durch die Folge der Kantenbeschriftungen) die Nummer des erreichten Knoten zuordnet. Beispielsweise ist $n(001) = 14$.

Lösung 4

a) $|V_n| = \sum_{k=0}^{n} 3^k$

b) Induktion über die Höhe $n \in \mathbb{N}_0$ des vollständigen Ternerbaumes.

Induktionsanfang $n = 0$**.** Höhe 0 bedeutet, dass der Baum nur aus der Wurzel besteht, also genau 1 Knoten besitzt.
$\frac{3^1-1}{2} = 1$. Aussage gilt.

Induktionsschritt $n \rightsquigarrow n+1$**.**
Induktionshypothese: $|V_n| = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$
zu zeigen: $|V_{n+1}| = \frac{3^{n+2} - 1}{2}$
Betrachten wir die Wurzel von T_{n+1}: Jeder der drei Kindknoten der Wurzel ist Wurzel eines vollständigen Ternärbaums der Höhe T_n mit $|V_n|$ Knoten.
Für die Zahl der Knoten in T_{n+1} bedeutet dies:

$$\begin{aligned}
|V_{n+1}| = 3 \cdot |V_n| + 1 &\overset{\text{I.H.}}{=} 3 \cdot \frac{3^{n+1} - 1}{2} + 1 = \frac{3 \cdot (3^{n+1} - 1) + 2}{2} \\
&= \frac{3^{n+2} - 3 + 2}{2} = \frac{3^{n+2} - 1}{2}
\end{aligned}$$

Dies zeigt die Induktionsbehauptung.

QED

c)

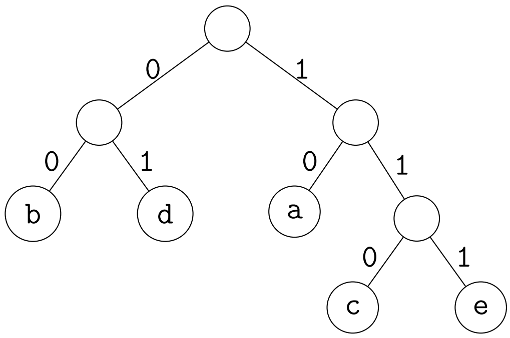
$$\begin{aligned}
n(\varepsilon) &= 0 \\
n(wx) &= 3n(w) + x + 1
\end{aligned}$$

Aufgabe 5: Codierung und Huffman-Bäume / 8

(1 + 1 + 2 + 3 + 1 = 8 Punkte)

Gegeben sind die beiden Alphabete $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}, \mathtt{e}\}$ und $B = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$.

a) Betrachten Sie den folgenden Huffman-Baum:



i) Geben Sie den Homomorphismus $h : A \to B^*$ an, der die zu diesem Baum gehörige Huffman-Codierung $h^{**} : A^* \to B^*$ induziert. Verwenden Sie dazu die untenstehende Tabelle. /1

x	a	b	c	d	e
$h(x)$					

ii) Geben Sie $h^{**}(\mathtt{eebc})$ an. /1

iii) Geben Sie ein Wort $w_1 \in A^*$ mit $|w_1| \leq 12$ an, sodass h^{**} eine Huffman-Codierung für w_1 ist. /2

/3

iv) Sei $w_2 = \mathtt{a}^3\mathtt{b}^3\mathtt{c}^3\mathtt{d}^m\mathtt{e}^n$. Zählen Sie alle Paare $(m, n) \in \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$ auf, sodass h^{**} **keine** Huffman-Codierung von w_2 ist.
(Falsche Paare führen zu Punktabzug.)

/1

b) Sei $g : A \to B^*$ gegeben durch

x	a	b	c	d	e
$g(x)$	01	001	000	1	010

Zeigen oder widerlegen Sie: Es gibt ein Wort $w' \in A^*$, sodass der induzierte Homomorphismus g^{**} eine Huffman-Codierung für w' ist.

Lösung 5

a) i) Der Homomorphismus h wird definiert durch:

x	a	b	c	d	e
h(x)	10	00	110	01	111

ii) $h^{**}(\mathtt{eebc}) = \mathtt{111\ 111\ 00\ 110}$

iii) z.B. abcde

iv) Für die folgenden Paare (m, n) ist h^{**} kein Huffman-Code für w_2:

$$(1,1),(1,2),(1,3),$$
$$(2,1),(2,2),(2,3)$$

Erklärung: Wenn h^{**} ein gültiger Huffman-Code für w_2 ist, kann nicht gleichzeitig $m < 3$ und $n < 3$ sein, sonst müssten d und e gleich am Anfang verschmolzen werden. Wir machen eine Fallunterscheidung über die Anzahl m der Symbole d in w_2:

- Wenn $m < 3$ ist, muss also $n = 3$ sein.
  Folgende Verschmelzungsoperationen dürfen und müssen auch vorgenommen werden, damit h^{**} Huffman-Code für w_2 ist:
  - $(\mathtt{d}, m)$, $(\mathtt{b}, 3)$ zu $(\{\mathtt{b}, \mathtt{d}\}, m+3)$ mit $m + 3 < 6$
  - $(\mathtt{c}, 3)$, $(\mathtt{e}, 3)$ zu $(\{\mathtt{c}, \mathtt{e}\}, 6)$

  Nun müssen aber die beiden Knoten kleinster Häufigkeit $(\{\mathtt{b}, \mathtt{d}\}, m+3)$ und $(\mathtt{a}, 3)$ verschmolzen werden. Für $m < 3$ kann also h^{**} kein Huffman-Code für w_2 sein.
- Fall $m = 3$: Nach Aufgabenstellung gilt ohnehin immer $n \leq 3$.
  Folgende Verschmelzungsoperationen dürfen und müssen auch vorgenommen werden, damit h^{**} Huffman-Code für w_2 ist:
  - $(\mathtt{c}, 3)$, $(\mathtt{e}, n)$ zu $(\{\mathtt{c}, \mathtt{e}\}, 3+n)$ mit $3 + n \leq 6$
  - $(\mathtt{d}, 3)$, $(\mathtt{b}, 3)$ zu $(\{\mathtt{b}, \mathtt{d}\}, 6)$
  - $(\mathtt{a}, 3)$, $(\{\mathtt{c}, \mathtt{e}\}, 3+n)$ zu $(\{\mathtt{a}, \mathtt{c}, \mathtt{e}\}, 6+n)$

  Für diesen Fall kann h^{**} also immer ein gültiger Huffman-Code sein.

b) g ist nicht Präfixfrei, kann also keine Huffman-Codierung sein.

Sie können diese Seite für Antworten oder Skizzen und Notizen nutzen.
Notieren Sie dann ggf. bei der Aufgabenstellung, wo die Lösung zu finden ist!

Aufgabe 6: Relationen und Funktionen (1 + 4 + 5 = 10 Punkte)

/ 10

a) Welche Eigenschaften muss eine Relation $S \subseteq M \times M$ erfüllen, damit S eine Äquivalenzrelation ist?

/1

Eine (in Infix-Notation geschriebene) Relation $S \subseteq A \times A$ heißt *zirkulär*, wenn gilt:

$$\forall x, y, z \in A : xSy \wedge ySz \to zSx$$

b) Zeigen Sie: S ist eine Äquivalenzrelation genau dann, wenn S zirkulär und reflexiv ist.

/4

Für beliebige Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}$ definieren wir die Relation

$$R = \{(x, y) \in A \times B \mid x^2 - y^2 = 0\}$$

/5

c) Finden Sie für jede der Teilaufgaben i) - v) jeweils ein maximales Mengenpaar $A, B \subseteq \mathbb{R}$, sodass

- die geforderte Eigenschaft für R gilt und
- die geforderte Eigenschaft **nicht** für Obermengen $A', B' \subseteq \mathbb{R}$ mit $A \times B \subsetneq A' \times B'$ gilt.

i) R ist linkstotal.

ii) R ist rechtstotal.

iii) R ist linkseindeutig.

iv) R ist rechtseindeutig.

v) R ist eine Abbildung (gleichbedeutend eine Funktion).

Lösung 6

a) i) Eine Relation S ist Äquivalenzrelation genau dann, wenn alle folgenden Eigenschaften zutreffen:

   - $\forall x \in M : xSx$ (Reflexivität)
   - $\forall x, y, z \in M : xSy \wedge ySz \rightarrow xSz$ (Transitivität)
   - $\forall x, y \in M : xSy \rightarrow ySx$ (Symmetrie)

b) Wir zeigen: S ist Äquivalenzrelation $\Leftrightarrow$ S ist zirkulär und reflexiv.

- "$\Rightarrow$"
  Sei S eine Äquivalenzrelation. S ist als Äquivalenzrelation ohnehin schon reflexiv.

  Es bleibt also zu zeigen, dass S auch zirkulär ist.
  Seien $x, y, z \in A$ beliebig und es gelte xSy und ySz.
  Wegen Transitivität von S gilt dann auch xSz und mit Symmetrie von S auch zSx.

- "$\Leftarrow$"
  Sei S reflexiv und zirkulär. Es bleibt also zu zeigen, dass S transitiv und symmetrisch ist.

  Transitivität: Seien $x, y, z \in A$ beliebig und es gelte xSy und ySz.
  Da S zirkulär ist, gilt auch zSx.
  Da S reflexiv ist, gilt auch zSz.
  Da S zirkulär ist, folgt aus zSz und zSx auch xSz.

  Symmetrie: Seien $x, y \in A$ beliebig und es gelte xSy.
  Da S reflexiv ist, gilt auch ySy.
  Da S zirkulär ist, folgt aus xSy und ySy, dass ySx gilt.

c) Es gilt

$$xRy \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow (x = y \vee x = -y)$$

(a) R ist bereits linkstotal für $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}$.

(b) R ist bereits rechtstotal für $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}$.

(c) R ist linkseindeutig für $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ und $B = \mathbb{R}$ oder für $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$ und $B = \mathbb{R}$.

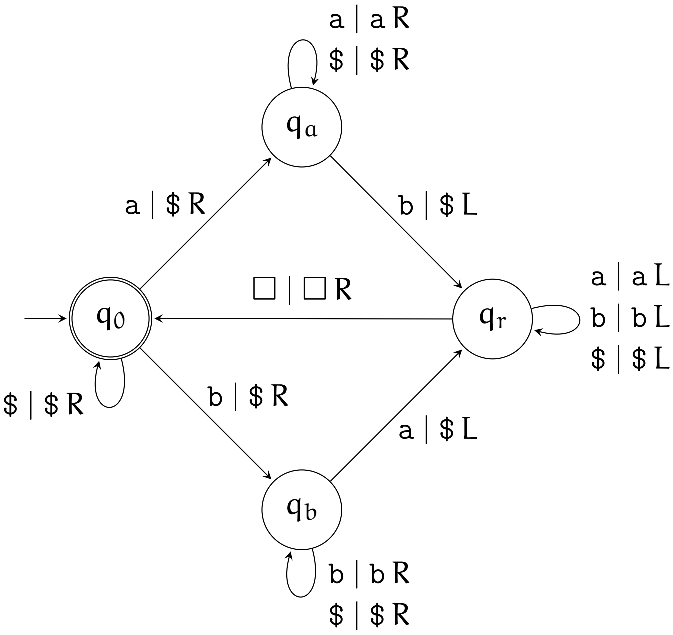
(d) R ist rechtseindeutig für $A = \mathbb{R}$ und $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = \mathbb{R}_0^+$ oder für $A = \mathbb{R}$ und $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$.

(e) R ist eine Abbildung für $A = \mathbb{R}$ und $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = \mathbb{R}_0^+$ oder für $A = \mathbb{R}$ und $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$.

Sie können diese Seite für Antworten oder Skizzen und Notizen nutzen.
Notieren Sie dann ggf. bei der Aufgabenstellung, wo die Lösung zu finden ist!

Aufgabe 7: Turingmaschinen (2 + 2 + 3 + 3 = 10 Punkte) / 10

Betrachten Sie die folgende Turingmaschine $\mathcal{M}$ mit Eingabealphabet $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ und Bandalphabet $B = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \$, \square\}$. $\square$ ist das Blanksymbol.



a) Führen Sie $\mathcal{M}$ für die Eingabe $w = \mathtt{bbbaabaa}$ aus und geben Sie jeweils das Arbeitsband an, wenn $\mathcal{M}$ von Zustand q_r in Zustand q_0 übergegangen ist. Markieren Sie jeweils die Position des Lesekopfs durch Einkreisen der Stelle auf dem Band. /2

Nutzen Sie dazu das folgende Raster. (Es werden nicht alle Zeilen des Rasters benötigt.)

□	b	b	b	a	a	b	a	a	□
□									□
□									□
□									□
□									□
□									□
□									□
□									□
□									□
□									□
□									□

/2

b) Geben Sie die Sprache $L(\mathcal{M})$ an, die durch $\mathcal{M}$ akzeptiert wird.

/3

c) Aus der Vorlesung sind die beiden folgenden Funktionen bekannt:

$$\begin{aligned} \mathit{time}_{\mathcal{M}} : A^+ &\to \mathbb{N}_+ \\ w &\mapsto \text{Anzahl der Schritte, nach der } \mathcal{M} \text{ bei} \\ & \text{ Eingabe von } w \text{ hält} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathit{Time}_{\mathcal{M}} : \mathbb{N}_+ &\to \mathbb{N}_+ \\ n &\mapsto \max_{w \in A^n} \mathit{time}_{\mathcal{M}}(w) \end{aligned}$$

i) Geben Sie eine obere asymptotische Schranke $f : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ für $\mathit{Time}_{\mathcal{M}}(n)$ in Abhängigkeit der Länge n des Eingabewortes an. Die Schranke muss *scharf* sein, d.h., es darf keine andere obere asymptotische Schranke $f_2(n)$ geben mit $f \notin O(f_2)$.

ii) Beweisen Sie, dass Ihre in i) angegebene Schranke scharf ist. Geben Sie dazu eine Funktion $W : \mathbb{N}_+ \to A^+$ an, so dass $|W(n)| = n$ und $(\mathit{time}_{\mathcal{M}} \circ W) \in \Theta(f)$.

Die folgende Aufgaben befassen sich mit Turingmaschinen im Allgemeinen.

d) Zeigen oder widerlegen Sie: Für jede Turingmaschine $\mathcal{M}$ ist $\mathsf{L}(\mathcal{M})$ entscheidbar genau dann, wenn $\mathcal{M}$ für jede Eingabe hält. /3

Lösung 7

a)

□	b	b	b	a	a	b	a	a	□
□	$	b	b	$	a	b	a	a	□
□	$	$	b	$	$	b	a	a	□
□	$	$	$	$	$	b	$	a	□
□	$	$	$	$	$	$	$	$	□

b) $L(\mathcal{M}) = \{w \in A^* \mid N_{\mathtt{a}}(w) = N_{\mathtt{b}}(w)\}$

c) i) $f : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+, n \mapsto n^2$

ii) $W : \mathbb{N}_+ \to A^+, n \mapsto \mathtt{a}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\mathtt{b}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$

d) Die Aussage ist falsch.
Bezeiche L die Sprache der Wörter $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$, die mit einem $\mathtt{a}$ beginnen. L ist offensichtlich entscheidbar durch eine Turingmaschine $\mathcal{M}$, die überprüft, ob das erste Zeichen ein $\mathtt{a}$ ist und – wenn ja – in einem akzeptierenden Zustand q_a anhält und sonst in einem nicht-akzeptierenden Zustand q_b hält. Wir betrachten nun die Turingmaschine $\mathcal{M}'$, die überprüft, ob das erste Zeichen ein $\mathtt{a}$ ist und – wenn ja – in einem akzeptierenden Zustand q_a hält, sonst aber in Zustand q_b übergeht und in einer Endlosschleife weiterläuft. Es gilt $L = L(\mathcal{M}')$, aber $\mathcal{M}'$ hält nicht für jede Eingabe.

Sie können diese Seite für Antworten oder Skizzen und Notizen nutzen.
Notieren Sie dann ggf. bei der Aufgabenstellung, wo die Lösung zu finden ist!

Sie können diese Seite für Antworten oder Skizzen und Notizen nutzen.
Notieren Sie dann ggf. bei der Aufgabenstellung, wo die Lösung zu finden ist!