Grundbegriffe der Informatik — Aufgabenblatt 10

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium Nr.:	
Tutor*in:	

Ausgabe: Freitag, 20.01.2023, 14:30 Uhr

Abgabe: Freitag, 27.01.2023, 12:30 Uhr
Online, oder in einem Briefkasten mit der Aufschrift GBI im UG des Info-Gebäudes (50.34)

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- handschriftlich erstellt sind (Tablet-Ausdruck erlaubt) und
- mit dieser Seite als Deckblatt
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

rechtzeitig abgegeben werden.

Abgaberegeln für Teilnehmer der Tutorien mit Online-Abgabe:

- handschriftlich erstellt (Scans und lesbare Fotos akzeptiert)
- **rechtzeitig**, mit diesem Deckblatt in **genau einer** PDF-Datei
- in ILIAS unter “Tutorien” im Ordner des richtigen Tutoriums abgeben.

---

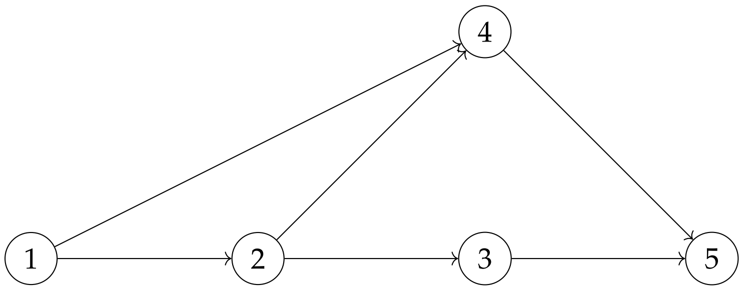
*Von Tutor*in auszufüllen:*

erreichte Punkte

Blatt 10:	/ 20
Blätter 7 – 10:	/ 81 (+4)
Blätter 1 – 10:	/ 205 (+4)

Aufgabe 10.1 (2 + 1 + 1 + 1 + 2 = 7 Punkte)
In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit Zusammenhängen zwischen verschiedenen Eigenschaften eines Graphen und seiner Darstellung als Adjazenzmatrix.

a) Betrachten Sie den folgenden Graphen:



   i) Geben Sie die Adjazenzmatrix des abgebildeten Graphen an.

   ii) Geben Sie die Wegematrix des abgebildeten Graphen an.

Wir betrachten nun einen beliebigen gerichteten Graphen $G = (V, E)$ und seine Darstellung als Adjazenzmatrix A.

b) Sei $L \subseteq \mathbb{N}_0$ eine Menge von Pfadlängen. Geben Sie in Abhängigkeit von A und L eine Formel zur Berechnung einer Matrix P an, sodass P_{ij} die Anzahl aller Pfade mit einer erlaubter Länge (d.h. mit einer Länge die in L liegt) vo Knoten i zu Knoten j in G ist.

c) Geben Sie eine Formel an, mit der sich der Ausgangsgrad $d^+(v_i)$ eines Knotens $v_i \in V$ aus A berechnen lässt.

d) Geben Sie eine Formel an, mit der sich der Eingangsgrad $d^-(v_i)$ eines Knotens $v_i \in V$ aus A berechnen lässt.

e) Eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *strikte obere Dreiecksmatrix* genau dann, wenn für alle $i, j \in \mathbb{Z}_n$ gilt: $m_{ij} = 0$, falls $i \geq j$.
Zeigen Sie: Wenn die Adjazenzmatrix A eine strikte obere Dreiecksmatrix ist, dann besitzt der zugehörige Graph G keinen Zyklus (man sagt, er ist *zyklenfrei*).

Aufgabe 10.2 (1 + 2 + 1 + 2 = 6 Punkte)
Sei $\Delta_n : Z_2^n \times Z_2^n \to \mathbb{N}_0, (w, w') \mapsto |\{i \in \mathbb{N}_0 \mid w(i) \neq w'(i)\}|$ die Funktion, die für zwei Bitfolgen der Länge n angibt, an wie vielen Stellen sie sich unterscheiden. Mithilfe von Δ_n definieren wir eine Familie von Graphen $G_n = (V_n, E_n)$ für $n \in \mathbb{N}_0$ mit

$$
\begin{aligned}
V_n &= Z_2^n \\
E_n &= \{(v, w) \in V_n \times V_n \mid \Delta_n(v, w) = 1 \text{ und } N_1(v) < N_1(w)\} .
\end{aligned}
$$

Weiter sei die Familie von Graphen $G'_n = (V'_n, E'_n)$ für $n \in \mathbb{N}_0$ gegeben durch die induktive Definition

$$
\begin{aligned}
V'_0 &= \{1\} \\
E'_0 &= \emptyset \\
V'_{i+1} &= V'_i \cup \{v + |V'_i| \mid v \in V'_i\} \\
E'_{i+1} &= E'_i \cup \{(u + |V'_i|, v + |V'_i|) \mid (u, v) \in E'_i\} \cup \{(v, v + |V'_i|) \mid v \in V'_i\} .
\end{aligned}
$$

a) Zeichnen Sie den Graphen G_3.

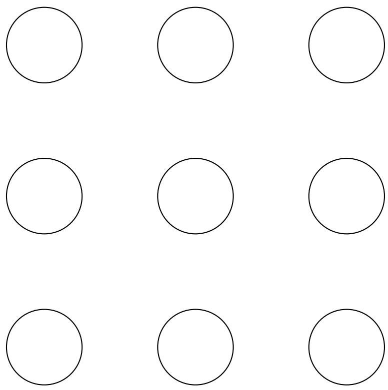
b) Zeichnen Sie die Graphen G'_1, G'_2 und G'_3.

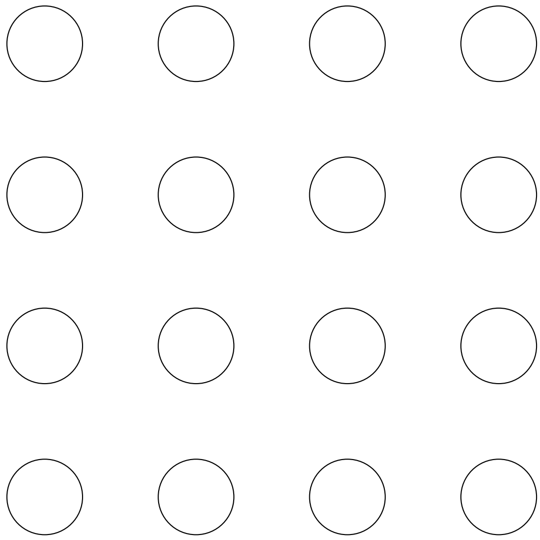
c) Sind die Graphen G_3 und G'_3 isomorph zueinander? Wenn ja, geben Sie einen geeigneten Isomorphismus an. Wenn nein, begründen Sie!
d) Sind die Graphen G_n und G'_n isomorph für beliebige $n \in \mathbb{N}_+$? Wenn ja, geben Sie in Abhängigkeit von n einen geeigneten Isomorphismus an. Wenn nein, begründen Sie!

Aufgabe 10.3 (1 + 2 + 4 = 7 Punkte)
Ähnlich wie auf Blatt 1 sei $B_n = \{(a,b) \in \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+ \mid 1 \leq a,b \leq n\}$ die Formalisierung eines Schachbrettes mit $n \times n$ Feldern. Damals haben Sie herausgefunden, dass sich die Menge aller möglichen Springerzüge auf einem traditionellen Schachbrett B_8 als Relation beschreiben lässt. Verallgemeinert auf ein Schachbrett mit $n \times n$ Feldern lautet die Relation:

$$R_n = \{((a_1,b_1),(a_2,b_2)) \in B_n \times B_n \mid |a_1 - a_2| + |b_1 - b_2| = 3 \wedge |a_1 - a_2| \in \{1,2\}\}\ .$$

In der Vorlesung haben Sie gesehen, dass sich Relationen mithilfe von Graphen ausdrücken lassen. Falls die Relation R_n symmetrisch ist, reicht es im Folgenden dann ungerichtete Graphen zu betrachten.
a) Zeigen Sie: R_n ist symmetrisch für alle $n \in \mathbb{N}_+$.
b) Zeichnen Sie die ungerichteten Graphen Graphen $U_3 = (B_3, R_3)$ und $U_4 = (B_4, R_4)$, die die möglichen Springerzüge auf Schachbrettern mit 3×3 beziehungsweise 4×4 Feldern repräsentieren.
Verwenden Sie dazu die vorgedruckten Knoten für B_3 und B_4:





c) Die Formalisierung als Graph ist hilfreich, um einige interessante Eigenschaften des Schachspiels zu analysieren. In dieser Aufgabe wollen wir folgende Aussage beweisen:

> Jedes Feld kann von einem Springer erreicht werden, egal auf welchem Feld der Springer startet.

Um die Gültigkeit dieser Aussage zu zeigen, sollen Sie beweisen, dass $U_8 = (B_8, R_8)$ zusammenhängend ist.
Zeigen Sie, dass U_8 zusammenhängend ist, indem Sie durch vollständige Induktion zeigen, dass U_n für alle $n \geq n_0$ (für ein sinnvoll von Ihnen gewähltes $n_0 \in \mathbb{N}_0$ zusammenhängend ist.
Hilfreiche Beobachtung: Betrachten Sie zusammenhängende Teilgraphen von U_n.
Hinweis: Sie können die obenstehende Beobachtung, das Induktionsprinzip und Ergebnisse voranstehender Teilaufgaben verwenden.