Grundbegriffe der Informatik — Aufgabenblatt 4
Lösungsvorschläge

Tutorium Nr.:		Tutor*in:	

Matr.nr. 1:			
Nach-,Vorname 1:		,	
Matr.nr. 2:			
Nach-,Vorname 2:		,	

Ausgabe:	Freitag, 18.11.2022, 14:30 Uhr
Abgabe:	Freitag, 25.11.2022, 12:30 Uhr Online, oder in einem Briefkasten mit der Aufschrift GBI im UG des Info-Gebäudes (50.34)

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- handschriftlich erstellt sind (Tablet-Ausdruck erlaubt) und
- mit dieser Seite als Deckblatt
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

rechtzeitig abgegeben werden.

Abgaberegeln für Teilnehmer der Tutorien mit Online-Abgabe:

- handschriftlich erstellt (Scans und lesbare Fotos akzeptiert)
- **rechtzeitig**, mit diesem Deckblatt in **genau einer** PDF-Datei
- in ILIAS unter "Tutorien" im Ordner des richtigen Tutoriums abgeben.

---

*Von Tutor*in auszufüllen:* erreichte Punkte

Blatt 4:	/ 20	Blätter 1 – 4, Stud. 1:	/ 84
		Blätter 1 – 4, Stud. 2:	/ 84

Aufgabe 4.1 (1 + 1 + 3 + 2 = 7 Punkte)
Sei A ein Alphabet. Wir betrachten die Funktion $\bullet^R : A^* \to A^*$, die jedem Wort $w \in A^*$ seine *Spiegelung* $w^R \in A^*$ zuordnet. Dieser Operator ist festgelegt für jedes $w \in A^*$ durch

$$\begin{aligned} |w^R| &= |w| \\ w^R(i) &= w(|w| - i - 1) \quad \text{für alle } 0 \leq i < |w| \ . \end{aligned}$$

Ein Wort $w \in A^*$ heißt Palindrom, wenn gilt $w^R = w$. Im lateinischen Alphabet sind z. B. „REGALLAGER“ oder „RACECAR“ Palindrome. $P_A = \{w \in A^* \mid w = w^R\}$ bezeichne die Sprache aller Palindrome über A.

a) Geben Sie alle alle Palindrome der Länge 4 über $\{a, b\}$ an.
b) Zeigen oder widerlegen Sie: Die Spiegelung ist selbstinvers.
Dies bedeutet: Zweimaliges Anwendung der Spiegelung führt zum Ausgangswort zurück, also $(w^R)^R = w$ für alle $w \in A^*$.
c) Betrachten Sie nun die Sprache $Q_A = \{ww^R \mid w \in A^*\}$.
   i) Zeigen oder widerlegen Sie: $Q_A \subseteq P_A$
   ii) Zeigen oder widerlegen Sie: $P_A \subseteq Q_A$
d) Definieren Sie induktiv eine Folge von Sprachen $L_i \subseteq A^*$ mit $A = \{a, b\}$ und $i \in \mathbb{N}_0$, sodass $P_A = \bigcup_{i=0}^{\infty} L_i$.

Lösung 4.1

a) {aaaa, abba, baab, bbbb}
b) Aus der folgenden Gleichung folgt direkt für alle $w \in A^*$, dass $(w^R)^R = w$. Damit ist $\bullet^R$ selbstinvers.

$$\begin{aligned} \forall w \in A^* \, \forall i \in \mathbb{Z}_{|w|} : (w^R)^R(i) &= w^R(|w| - i - 1) \\ &= w(|w| - (|w| - i - 1) - 1) \\ &= w(|w| - |w| + i + 1 - 1) \\ &= w(i) \end{aligned}$$

c) i) Zeige $Q_A \subseteq P_A$:
Sei $w' = ww^R \in Q_A$. Zu zeigen: $(ww^R)^R = ww^R$, also $(w')^R(i) = w'(i)$ für $0 \leq i < |w'| = 2|w|$.
Es gilt nach Definition der Konkatenation:

$$w' = ww^R = \begin{cases} w(i), & \text{für } 0 \leq i < |w| \\ w^R(i - |w|), & \text{für } |w| \leq i < 2|w| \end{cases}$$

Wir machen eine Fallunterscheidung über den Wert von i.

Fall 1: Sei $0 \leq i < |w|$. Dann gilt:
$w'(i) = w(i)$ nach Definition der Konkatenation. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} (w')^R(i) &= w'(|w'| - i - 1) \quad (\text{ Def. } \bullet^R) \\ &= w'(2|w| - i - 1) \quad (|w'| = 2|w|) \\ &= w^R(2|w| - i - 1 - |w|) \quad (\text{ Konkatenation Fall 2 }) \\ &= w^R(|w| - i - 1) \\ &= (w^R)^R(i) \quad (\text{ Def. } \bullet^R) \\ &= w(i) \quad (\text{ nach Aufgabe 4.1b) }) \end{aligned}$$

Damit gilt: $w'(i) = w(i) = (w')^R(i)$ für $0 \leq i < |w|$.

Fall 2: Sei $|w| \leq i < |w'| = 2|w|$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} w'(i) &= w^R(i - |w|) \quad (\text{ Def. Konkatenation }) \\ &= w(|w| - (i - |w|) - 1) \quad (\text{ Def. } \bullet^R) \\ &= w(2|w| - i - 1) \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} (w')^R(i) &= w'(|w'| - i - 1) \quad (\text{ Def. } \bullet^R) \\ &= w'(2|w| - i - 1) \\ &= w(2|w| - i - 1) \end{aligned}$$

Dabei folgt die letze Zeile nach der Definition der Konkatenation mittels

$$2|w| - i - 1 < |w| \quad \text{gdw.} \quad |w| - 1 < i \quad \text{gdw.} \quad |w| \leq i$$

und wir befinden uns im Fall $|w| \leq i < 2|w|$.
Damit gilt auch in diesem Fall $w'(i) = w(2|w| - i - 1) = (w')^R(i)$.

Da die Behauptung in beiden Fällen gilt, gilt sie auch insgesamt.

ii) Widerlege $P_A \subseteq Q_A$:
$aba \in P_A$, aber wegen $|aba| = 3$ nicht in Q_A.

d)

$$\begin{aligned} L_0 &= \{\varepsilon, a, b\} \\ L_{n+1} &= (\{a\}L_n\{a\}) \cup (\{b\}L_n\{b\}) \end{aligned}$$

Aufgabe 4.2 (1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 Punkte)
Gegeben sei das Alphabet $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. Verwenden Sie für die Beantwortung der Teilaufgaben a)-d) *ausschließlich* folgende Zeichen:

$$\mathtt{a} \quad \mathtt{b} \quad \{ \quad \} \quad (\quad) \quad , \quad * \quad \cdot \quad \cup$$

a) Geben Sie die Sprache $L_1 = \{\varepsilon\}$ an.
b) Geben Sie die Sprache $L_2 = \{xwx \mid w \in A^* \text{ und } x \in A\}$ an.
c) Geben Sie die Sprache L_3 aller Wörter an, die an dritten Stelle ein b haben, oder auf abba enden.
d) Geben Sie die Sprache $L_4 = \{w \in A^* \mid |w| \textbf{ mod } 2 = 0\}$ an.
e) Gilt $\varepsilon \in (L_2 \cup L_4)^+$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung 4.2
a) $L_1 = \{\}^*$
b) $L_2 = (\{a\} \cdot \{a, b\}^* \cdot \{a\}) \cup (\{b\} \cdot \{a, b\}^* \cdot \{b\})$
c) $L_3 = (\{aa, ab, ba, bb\} \cdot \{b\} \cdot \{a, b\}^*) \cup (\{a, b\}^* \cdot \{abba\})$
d) $L_4 = \{aa, ab, ba, bb\}^*$

e) Es gilt $\varepsilon \in L_4$ und damit auch $\varepsilon \in (L_2 \cup L_4)^+$.

Aufgabe 4.3 (1 + 3 + 0 + 3 + 1 = 8 Punkte)
Es sei $A = \{a, b\}$ ein Alphabet und die Abbildung $f : A^* \to A^*$ wie folgt induktiv definiert:

$$f(\varepsilon) = \varepsilon, \quad f(a) = a, \quad f(b) = b \tag{1}$$
$$\forall w \in A^+ : f(w \cdot a) = a \cdot f(w) \tag{2}$$
$$\forall w \in A^+ : f(w \cdot b) = f(w) \cdot b \tag{3}$$

Außerdem bezeichne $N_x(w)$ die Anzahl der Vorkommen eines Zeichens $x \in A$ in einem Wort $w \in A^*$.

a) Berechnen Sie $f(baba)$ schrittweise.
b) Beweisen Sie durch vollständige Induktion: $\forall w \in A^* : N_a(w) = N_a(f(w))$
c) Machen Sie sich klar, dass Sie auf dieselbe Weise auch die Aussage $\forall w \in A^* : N_b(w) = N_b(f(w))$ beweisen können.
d) Sei $L = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}_0\}$ und bezeichne $f(M) = \{f(w) \mid w \in M\}$ für eine Menge $M \subseteq A^*$.
Beweisen Sie durch vollständige Induktion: $f(A^*) \subseteq L$
e) Beschreiben Sie, was die Funktion f berechnet.

Lösung 4.3

a) Nach der Definition von f gilt:

$$\begin{aligned} f(baba) &= f(bab \cdot a) = a \cdot f(bab) \\ &= a \cdot f(ba \cdot b) = a \cdot f(ba) \cdot b \\ &= a \cdot f(b \cdot a) \cdot b = aa \cdot f(b) \cdot b \\ &= aa \cdot b \cdot b = aabb \end{aligned}$$

b) Wir beweisen die Behauptung $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \forall w \in A^n : N_a(w) = N_a(f(w))$. Der Beweis wird per Induktion über die Wortlänge $|w| = n \in \mathbb{N}_0$ geführt:

Induktionsanfang : Sei $n = 0$.
Es ist $w = \varepsilon \in A^*$ das einzige Wort mit $|w| = 0$. Es gilt:

$$N_a(f(\varepsilon)) = N_a(\varepsilon) = 0\,. \tag{4}$$

Induktionsschritt Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig aber fest.
Es gelte die **Induktionsvoraussetzung**:

$$\forall w \in A^n : N_a(w) = N_a(f(w)) \tag{5}$$

Sei $w \in A^{n+1}$ beliebig. Da $|w| = n + 1 > 0$ gibt es $w' \in A^n$ und $x \in A = \{a, b\}$ mit $w = w'x$.
Wir verwenden eine Fallunterscheidung über die Werte von $x \in \{a, b\}$.

- Sei $x = a$. Dann gilt $N_a(w) = N_a(w'a) = N_a(w') + 1$ und

$$\begin{aligned}
N_a(f(w)) &= N_a(f(w'a)) && (6)\\
&= N_a(a \cdot f(w')) && (7)\\
&= 1 + N_a(f(w')) && (8)\\
(Induktionsvoraussetzung) \quad &= 1 + N_a(w') && (9)
\end{aligned}$$

- Sei $x = b$. Dann gilt $N_a(w) = N_a(w'b) = N_a(w')$ und

$$\begin{aligned}
N_a(f(w)) &= N_a(f(w'b)) && (10)\\
&= N_a(b \cdot f(w')) && (11)\\
&= N_a(f(w')) && (12)\\
(Induktionsvoraussetzung) \quad &= N_a(w') && (13)
\end{aligned}$$

d) Wir beweisen die Behauptung $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \forall w \in A^n : f(w) \in L$. Der Beweis wir per Induktion über die Wortlänge $|w| = n \in \mathbb{N}_0$ geführt:

Induktionsanfang : Sei $n = 0$.
Es ist ε das einzige Wort mit Länge 0. Es gilt:

$$f(\varepsilon) = \varepsilon = a^0 b^0 \in \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}_0\} = L \tag{14}$$

Induktionsschritt Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig aber fest.
Es gelte die **Induktionsvoraussetzung**: $\forall w \in A^n : f(w) \in L$
Sei $w \in A^{n+1}$ beliebig. Da $|w| = n + 1 > 0$ gibt es $w' \in A^n$ und $x \in A = \{a, b\}$ mit $w = w'x$.
Wir verwenden eine Fallunterscheidung über die Werte von $x \in \{a, b\}$:

- Sei $x = a$. Dann ist

$$f(w) = f(w'a) = a \cdot f(w')$$

und nach IV gilt $f(w') \in L$. Also gibt es passende $i, j \in \mathbb{N}_0$ sodass $f(w') = a^i b^j$ und damit

$$a \cdot f(w') = a \cdot a^i b^j = a^{i+1} b^j \in L$$

- Sei $x = b$. Dann ist

$$f(w) = f(w'b) = f(w') \cdot b$$

und nach IV gilt $f(w') \in L$. Also gibt es passende $i, j \in \mathbb{N}_0$ sodass $f(w') = a^i b^j$ und damit

$$f(w') \cdot b = a^i b^j \cdot b = a^i b^{j+1} \in L$$

e) $f(w)$ berechnet eine Permutation des Wortes $w \in A^*$, sodass zuerst alle a und dann alle b stehen.