Grundbegriffe der Informatik — Aufgabenblatt 4

Tutorium Nr.:		Tutor*in:	

Matr.nr. 1:			
Nach-,Vorname 1:		,	
Matr.nr. 2:			
Nach-,Vorname 2:		,	

Ausgabe: Freitag, 18.11.2022, 14:30 Uhr

Abgabe: Freitag, 25.11.2022, 12:30 Uhr
Online, oder in einem Briefkasten mit der Aufschrift GBI im UG des Info-Gebäudes (50.34)

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- handschriftlich erstellt sind (Tablet-Ausdruck erlaubt) und
- mit dieser Seite als Deckblatt
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

rechtzeitig abgegeben werden.

Abgaberegeln für Teilnehmer der Tutorien mit Online-Abgabe:

- handschriftlich erstellt (Scans und lesbare Fotos akzeptiert)
- **rechtzeitig**, mit diesem Deckblatt in **genau einer** PDF-Datei
- in ILIAS unter "Tutorien" im Ordner des richtigen Tutoriums abgeben.

---

*Von Tutor*in auszufüllen:* erreichte Punkte

Blatt 4: / 20 Blätter 1 – 4, Stud. 1: / 84

Blätter 1 – 4, Stud. 2: / 84

Aufgabe 4.1 (1 + 1 + 3 + 2 = 7 Punkte)
Sei A ein Alphabet. Wir betrachten die Funktion $\bullet^R : A^* \to A^*$, die jedem Wort $w \in A^*$ seine *Spiegelung* $w^R \in A^*$ zuordnet. Dieser Operator ist festgelegt für jedes $w \in A^*$ durch

$$|w^R| = |w|$$
$$w^R(i) = w(|w| - i - 1) \quad \text{für alle } 0 \le i < |w| \ .$$

Ein Wort $w \in A^*$ heißt Palindrom, wenn gilt $w^R = w$. Im lateinischen Alphabet sind z. B. „REGALLAGER“ oder „RACECAR“ Palindrome. $P_A = \{w \in A^* \mid w = w^R\}$ bezeichne die Sprache aller Palindrome über A.

a) Geben Sie alle alle Palindrome der Länge 4 über $\{a, b\}$ an.
b) Zeigen oder widerlegen Sie: Die Spiegelung ist selbstinvers.
Dies bedeutet: Zweimaliges Anwendung der Spiegelung führt zum Ausgangswort zurück, also $(w^R)^R = w$ für alle $w \in A^*$.
c) Betrachten Sie nun die Sprache $Q_A = \{ww^R \mid w \in A^*\}$.
   i) Zeigen oder widerlegen Sie: $Q_A \subseteq P_A$
   ii) Zeigen oder widerlegen Sie: $P_A \subseteq Q_A$
d) Definieren Sie induktiv eine Folge von Sprachen $L_i \subseteq A^*$ mit $A = \{a, b\}$ und $i \in \mathbb{N}_0$, sodass $P_A = \bigcup_{i=0}^{\infty} L_i$.

Aufgabe 4.2 (1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 Punkte)
Gegeben sei das Alphabet $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. Verwenden Sie für die Beantwortung der Teilaufgaben a)-d) *ausschließlich* folgende Zeichen:

$$\mathtt{a} \quad \mathtt{b} \quad \{ \quad \} \quad (\quad) \quad , \quad * \quad \cdot \quad \cup$$

a) Geben Sie die Sprache $L_1 = \{\varepsilon\}$ an.
b) Geben Sie die Sprache $L_2 = \{xwx \mid w \in A^* \text{ und } x \in A\}$ an.
c) Geben Sie die Sprache L_3 aller Wörter an, die an dritten Stelle ein b haben, oder auf abba enden.
d) Geben Sie die Sprache $L_4 = \{w \in A^* \mid |w| \textbf{ mod } 2 = 0\}$ an.
e) Gilt $\varepsilon \in (L_2 \cup L_4)^+$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4.3 (1 + 3 + 0 + 3 + 1 = 8 Punkte)
Es sei $A = \{a, b\}$ ein Alphabet und die Abbildung $f : A^* \to A^*$ wie folgt induktiv definiert:

$$f(\varepsilon) = \varepsilon, \quad f(a) = a, \quad f(b) = b \tag{1}$$
$$\forall w \in A^+ : f(w \cdot a) = a \cdot f(w) \tag{2}$$
$$\forall w \in A^+ : f(w \cdot b) = f(w) \cdot b \tag{3}$$

Außerdem bezeichne $N_x(w)$ die Anzahl der Vorkommen eines Zeichens $x \in A$ in einem Wort $w \in A^*$.

a) Berechnen Sie $f(baba)$ schrittweise.
b) Beweisen Sie durch vollständige Induktion: $\forall w \in A^* : N_a(w) = N_a(f(w))$
c) Machen Sie sich klar, dass Sie auf dieselbe Weise auch die Aussage $\forall w \in A^* : N_b(w) = N_b(f(w))$ beweisen können.

d) Sei $L = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}_0\}$ und bezeichne $f(M) = \{f(w) \mid w \in M\}$ für eine Menge $M \subseteq A^*$.
Beweisen Sie durch vollständige Induktion: $f(A^*) \subseteq L$

e) Beschreiben Sie, was die Funktion f berechnet.