Karlsruher Institut für Technologie

Nachklausur Grundbegriffe der Informatik
SS 2022

01. August 2022

Name:	
Matrikelnummer:	

Beachten Sie:

- Schreiben Sie Ihren vollständigen **Namen** und **Matrikelnummer** in Druckschrift in das Feld auf dem Deckblatt!
- Schreiben Sie Ihre Matrikelnummer oben auf jedes bearbeitete Aufgabenblatt.
- Schreiben Sie Ihre Lösungen auf die Aufgabenblätter. Bei Bedarf können Sie weiteres Papier anfordern.
- Wir akzeptieren auch englische Antworten.
- Sie haben **120 Minuten** Bearbeitungszeit.
- Die Klausur umfasst 22 Seiten (11 Blätter) mit 7 Aufgaben.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	**Gesamt**
Erreichte Punkte								
Erreichbare Punkte	11	8	9	7	10	7	8	**60**

Note

Aufgabe 1: Allgemeine Fragen (11 Punkte)

a) Begründen oder widerlegen Sie: für Mengen A, B und C gilt: **(1 Punkt)**

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \ .$$

b) i) Wie viele Modelle $\{ P, Q, R \} \to \mathbb{B}$ besitzt die folgende aussagenlogische Formel?

$$F = (P \to Q) \wedge (Q \to R) \wedge R$$

Umkreisen Sie den entsprechenden Wert k in der ersten Spalte der Tabelle. Geben Sie für $1 \leq i \leq k$ in Zeile i jeweils ein Modell I_i explizit an. **(1 Punkt)**

Modell i	$I_i(P)$	$I_i(Q)$	$I_i(R)$
1			
2			
3			
4			
5			

ii) Sei Formel F wie zuvor. Geben Sie eine aussagenlogische Formel G an, so dass $\{ F, G \} \models \bot$. Dabei sei $\bot$ eine Formel, die immer falsch ist. Begründen Sie, warum G die erwünschte Eigenschaft hat. **(1 Punkt)**

c) i) Zeigen Sie, dass die Relation „=“ (Identität) auf einer nichtleeren Menge M eine Halbordnung ist. **(3 Punkte)**

ii) Geben Sie für die Menge $M = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ das Hasse-Diagramm dieser Halbordnung an. **(1 Punkt)**

d) Gegeben sei ein ungerichteter Graph $G_1 = (V, E)$ mit $V = \mathbb{Z}_4$ und

$$E = \{\{x, y\} \in V \times V \mid x \cdot y \bmod 2 = 0\}.$$

Geben Sie die Adjazenzmatrix A von G_1 an. **(1 Punkt)**

e) Sei n die Anzahl der Knoten in einem gerichteten, streng zusammenhängenden Graphen G_2. Geben Sie die kleinstmögliche Anzahl an Kanten in Abhängigkeit von n für G_2 an. **(1 Punkt)**

f) Gegeben sei nun ein gerichteter Graph G_3 mit $n > 2$ Knoten und $(n-1)^2$ Kanten. Zeigen oder widerlegen Sie, dass G_3 immer zusammenhängend ist. **(2 Punkte)**

Matrikelnummer: ______________________

Aufgabe 2: Homomorphismen (8 Punkte)

Seien die Alphabete $A = \{ \mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c} \}$ und $B = \{ \mathtt{0}, \mathtt{1} \}$ gegeben.

a) Sei $f\colon A^* \to B^*$ eine Funktion mit $f(\mathtt{aa}) = \mathtt{01}$. Kann es sich bei f um einen Homomorphismus handeln? Falls ja, geben Sie eine vollständige Definition von f auf A an; falls nein, begründen Sie. **(1 Punkt)**

b) Sei $g\colon A^* \to B^*$ eine Funktion mit

$$g(\mathtt{aabc}) = g(\mathtt{cbc}) = w$$

für ein $w \in B^*$.

i) Sei L die Sprache, die genau die Wörter w enthält, für die es einen Homomorphismus g mit obiger Eigenschaft gibt. Geben Sie einen Mengenausdruck für die Sprache L an und begründen Sie. **(3 Punkte)**

ii) Mit L' wollen wir die Sprache der Wörter w bezeichnen, für die es einen Homomorphismus g mit der Eigenschaft aus der vorangegangenen Teilaufgabe i) und der zusätzlichen Eigenschaft $g(\mathtt{b}) = 1$ gibt. Was lässt sich über die Länge der Worte in L' sagen? Begründen Sie Ihre Antwort. **(2 Punkte)**

c) Sei $h\colon A^* \to B^*$ ein Homomorphismus mit $h(\mathtt{a}) = \mathtt{1}$, $h(\mathtt{b}) = \mathtt{01}$ und $h(\mathtt{c}) = \mathtt{010}$. Für beliebige Sprachen L sei ferner $h^{-1}(L) = \{\, w \mid h(w) \in L \,\}$. Wir betrachten nun die Sprache $L_{01} = \{\, (\mathtt{01})^n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$. Geben Sie einen endlichen Akzeptor mit höchstens vier Zuständen für $h^{-1}(L_{01})$ an. **(2 Punkte)**

Aufgabe 3: Huffman-Codierung (9 Punkte)

Seien

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \{a_1\} \text{ und} \\ \forall i > 1: \quad \mathcal{A}_i &= \{a_i\} \cup \mathcal{A}_{i-1} \end{aligned}$$

Alphabete, über denen die folgenden Sprachen induktiv definiert sind:

$$\begin{aligned} L_1 &= \{\, a_1 \,\} \\ L_2 &= \{\, a_1^8 a_2,\ a_2 a_1^8 \,\} \\ \forall n \geq 3: L_n &= \{\, uv^2 a_n a_{n-1}^7 \mid u \in L_{n-1}, v \in L_{n-2} \,\} \cup \{\, a_n a_{n-1}^7 uv^2 \mid u \in L_{n-1}, v \in L_{n-2} \,\} \end{aligned}$$

a) Geben Sie explizit alle Wörter $w \in L_3$ an. **(2 Punkte)**

b) Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_+$ und $w \in L_n$ gilt: **(5 Punkte)**

$$N_{a_1}(w) = 3 \cdot 2^{n-1} + 2 \cdot (-1)^n$$

Hinweise: Verwenden Sie starke Induktion. Sie können davon ausgehen, dass a_1 in allen $w \in L_n$ gleich oft vorkommt, ohne es zu beweisen.

c) Die Anzahl der a_i in beliebigen $w \in L_n$ kann durch folgende Formel angegeben werden:

$$N_{a_i}(w) = 3 \cdot 2^{n-i} + 2 \cdot (-1)^{n-i+1} \quad .$$

Zeichnen Sie den Huffman-Baum für alle $w \in L_5$ und berechnen Sie die Länge $|H(w)|$ der entsprechenden Codierungen $H(w)$. **(2 Punkte)**

Matrikelnummer: ____________________

Aufgabe 4: Logik (7 Punkte)

a) Sei das Alphabet der Aussagenlogik (wie in der Vorlesung) gegeben als:

$$A_{AL} = \{ (,), \neg, \wedge, \vee, \rightarrow \} \cup Var_{AL}$$

.

i) Wie viele synatktisch unterschiedliche Formeln lassen sich durch die in der Vorlesung eingeführten Konstruktionsabbildungen für aussagenlogische Formeln genrieren, wenn $Var_{AL} = \{ A, B \}$? **(1 Punkt)**

ii) Wie viele semantisch unterschiedliche Formeln lassen sich, durch die in der Vorlesung eingeführten Konstruktionsabbildungen für aussagenlogische Formeln genrieren, wenn $Var_{AL} = \{ A \}$? **(1 Punkt)**

b) Vereinfachen Sie die folgende Formel zu einer äquivalenten Formel, in der keine Implikation mehr vorkommt und die Operatoren $\vee$, $\wedge$ und $\neg$ direkt vor Variablen stehen. Geben Sie dabei mindestens zwei Zwischenschritte an. **(2 Punkte)**

$$(\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg\neg C)$$

c) Zeigen oder wiederlegen Sie die folgenden Aussagen:

i) Die Formel $(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \wedge (A \to C) \wedge (\neg C)$ ist erfüllbar. **(2 Punkte)**

ii) Die Formel $(A \to B) \vee (B \to C)$ ist eine Tautologie. **(1 Punkt)**

Matrikelnummer: ____________________

Aufgabe 5: Grammatiken (10 Punkte)

a) Gegeben sei die Grammatik $G_1 = (N, T, S, P)$ mit

$$\begin{aligned} N =& \{S, X\} \\ T =& \{a, b, c\} \\ P =& \{S \to aSc \mid X\ , \\ & \ X \to Xb \mid \varepsilon \\ & \} \end{aligned}$$

i) Geben Sie $L(G_1)$ explizit als Mengenausdruck an. Triviale Beschreibungen wie $L(G_1) = \{w \mid S \Rightarrow^* w\}$ geben keine Punkte. **(1 Punkt)**

ii) Gibt es eine rechtslineare Grammatik, welche $L(G_1)$ erzeugen kann? Begründen Sie. **(1 Punkt)**

b) Gegeben sei die formale Sprache $L_2 = \{a^n b^m c^k \in \{a, b, c\}^* \mid n, m, k \in \mathbb{N}_0 \land m + n = k\}$.

i) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G_2 an, so dass $L(G_2) = L_2$. **(2 Punkte)**

ii) Geben Sie den Ableitungsbaum zu $w = aabbcccc$ an. **(1 Punkt)**

iii) Wie können Sie G_2 modifizieren, so dass Ihre Grammatik nun L_2^* erzeugt? **(1 Punkt)**

Matrikelnummer: ____________________

c) Gegeben sei die Grammatik $G_3 = (N, T, S, P)$ mit

$$
\begin{aligned}
N =& \{S, Y\} \\
T =& \{0, 1\} \\
P =& \{S \to 1Y00 \\
& \quad Y \to 1Y \mid 0Y \mid \varepsilon \\
& \quad \}
\end{aligned}
$$

i) Geben Sie einen regulären Ausdruck an, welcher $L(G_3)$ erzeugt. **(1 Punkt)**

ii) Begründen Sie warum für alle $w \in L(G_3)$ die folgende Eigenschaft gilt: **(1 Punkt)**

$$Num_2(w) \bmod 4 = 0.$$

d) Wir betrachten im folgenden zwei beliebige Grammatiken $G_4 = (N_4, T_4, S_4, P_4)$ und $G_5 = (N_5, T_5, S_5, P_5)$. Geben Sie eine Konstruktion für eine Grammatik G_6 an, welche $L(G_4) \cdot L(G_5)$ erzeugt. **(2 Punkte)**

Aufgabe 6: Automaten und reguläre Ausdrücke (7 Punkte)

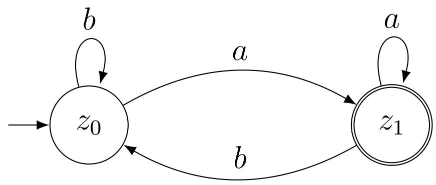
a) Geben Sie einen endlichen Akzeptor $A_1 = (Z, z_0, \Sigma, f, F)$ mit $|Z| \leq 4$ und $\Sigma = \{a, b, c\}$ an, der L_1 akzeptiert. **(1 Punkt)**

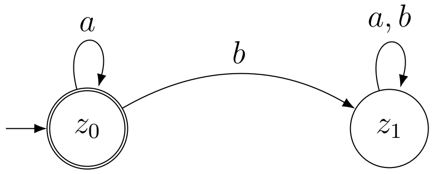
$$L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält } ab \text{ als Teilwort}\}$$

b) Geben Sie einen endlichen Akzeptor $A_2 = (Z, z_0, \Sigma, f, F)$ mit $|Z| \leq 4$ und $\Sigma = \{a, b, c\}$ an, der L_2 akzeptiert. **(1 Punkt)**

$$L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält nicht } bc \text{ als Teilwort}\}$$

c) Geben Sie einen endlichen Akzeptor $A_3 = (Z, z_0, \Sigma, f, F)$ mit $|Z| \leq 5$ und $\Sigma = \{a, b\}$ an, der alle Wörter akzeptiert, welche durch mindestens einen der angegebenen Automaten akzeptiert werden. **(2 Punkte)**

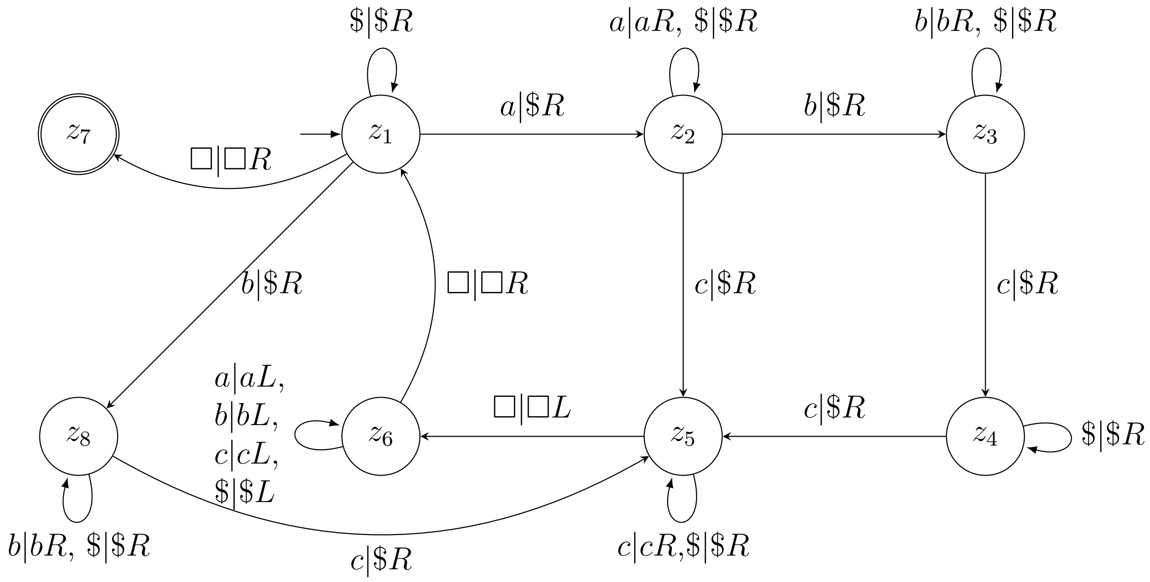

b
a
a
z_0
z_1
b


a
b
a, b
z_0
z_1

d) Gegeben sei eine unendliche Menge beliebiger Automaten $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}_+\}$ und die von Ihnen aktzeptierten Sprachen $L(A_i)$. Sei ferner $L' = \bigcup_{i=1}^{\infty}(L(A_i))$. Gibt es immer einen endlichen Automaten A' mit $L(A') = L'$? Begründen Sie Ihre Antwort. **(2 Punkte)**

e) Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der die Sprache L_1 aus Teilaufgabe a) beschreibt. **(1 Punkt)**

Aufgabe 7: Turingmaschinen (8 Punkte)



a) Führen Sie die Turingmaschine für die Eingabe *aabbcccc* aus und geben Sie jeweils das Arbeitsband an, wenn die Turingmaschine von Zustand z_6 in den Zustand z_1 übergeht. **(1 Punkt)**

b) Führen Sie die Turingmaschine für die Eingabe *abbcc* aus und geben Sie jeweils das Arbeitsband an, wenn die Turingmaschine von Zustand z_6 in den Zustand z_1 übergeht. **(1 Punkt)**

c) Geben Sie die Sprache an, welche durch die obige angegebene Turingmaschine akzeptiert wird. **(2 Punkte)**

d) Ist die von Ihnen angegebene Sprache in Aufgabenteil c) entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort. **(1 Punkt)**

e) Ist die von Ihnen angegebene Sprache in Aufgabenteil c) aufzählbar? Begründen Sie Ihre Antwort. **(1 Punkt)**

f) Entwerfen Sie eine TM mit Bandalphabet $X = \{g, i, l, b, e, r, t, \$, \square\}$, die nach vollständiger Bearbeitung einer beliebigen Eingabe mit Eingabealphabet $X \setminus \{\square\}$ ausschließlich das Wort **gbi** auf dem Arbeitsband stehen hat. **(2 Punkte)**