# Grundbegriffe der Informatik — Aufgabenblatt 4
# Lösungsvorschläge

| | | | |
|---|---|---|---|
| Tutorium Nr.: | | Tutor*in: | |
| Matr.nr. 1: | | | |
| Nach-,Vorname 1: | | , | |
| Matr.nr. 2: | | | |
| Nach-,Vorname 2: | | , | |

Ausgabe: 12. November 2021, 12:00 Uhr

Abgabe: 19. November 2021, 12:30 Uhr
in dem Holzkasten neben dem Raum -119
im UG des Info-Gebäudes (50.34)

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- handschriftlich erstellt sind (Tablet-Ausdruck erlaubt) und
- mit dieser Seite als Deckblatt
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

**rechtzeitig** abgegeben werden.

Abgaberegeln für Teilnehmer der Online-Tutorien:

- handschriftlich erstellt (lesbare Fotos akzeptiert)
- **rechtzeitig**, mit diesem Deckblatt in **genau einer** PDF-Datei
- direkt an den entsprechenden Tutor abgeben.

---

*Von Tutor*in auszufüllen:* erreichte Punkte

| | | | |
|---|---|---|---|
| Blatt 4: | / 20 | Blätter 1 – 4, Stud. 1: | / 80 |
| | | Blätter 1 – 4, Stud. 2: | / 80 |

In allen Aufgaben auf diesem Blatt steht $A$ für das Alphabet $\{\mathtt{a},\mathtt{b}\}$ und $\mathbb{N}$ für $\mathbb{N}_+$

**Aufgabe 4.1 (0,5 + 1 + 1,5 + 1 + 1 + 3 = 8 Punkte)**

Für beliebige formale Sprachen $L, L_i, L_k \subseteq A^*$ definieren wir das sogenannte *Komplement* $L^c$ von $L$, sowie die binäre Operation $\cap^c : \mathcal{P}(A^*) \times \mathcal{P}(A^*) \to \mathcal{P}(A^*)$ als:

$$L^c := A^* \setminus L \qquad\qquad L_i \cap^c L_k := (L_i \cap L_k)^c$$

a) Geben Sie $\emptyset^c$ und $(A^*)^c$ an.

b) Beweisen oder widerlegen Sie: $\cap^c$ ist kommutativ.

c) Ist $\cap^c$ ist assoziativ? Beweisen Sie.

d) Geben sie eine weitere binäre Operation $\mathcal{P}(A^*) \times \mathcal{P}(A^*) \to \mathcal{P}(A^*)$ an, die genau die gleichen Eigenschaften wie $\cap^c$ bezüglich Kommutativität und Assoziativität hat. Diese muss sich von $\cap^c$ echt unterscheiden, d.h: sie darf nicht via mengenäquivalenten Umformungen zu $\cap^c$ umformbar sein.

e) Geben Sie eine weitere binäre Operation $\mathcal{P}(A^*) \times \mathcal{P}(A^*) \to \mathcal{P}(A^*)$, die genau die gegenteiligen Eigenschaften wie $\cap^c$ bzgl. Kommutativität und Assoziativität hat.

f) Beweisen Sie:
   - $L_1 \cap L_2 = (L_1^c \cup L_2^c)^c$
   - $L_1 \cup L_2 = (L_1^c \cap L_2^c)^c$

   *Hinweis:*
   Lassen Sie sich von Übungsblatt 3 inspirieren, wie so ein Beweis aussehen kann.

**Lösung 4.1**

a) Es gilt: $\emptyset^c = A^* \setminus \emptyset = A^*$ und $(A^*)^c = A^* \setminus A^* = \emptyset$

b) Die Kommutativität von $\cap^c$ folgt direkt aus der Kommutativität von $\cap$. Intuitive Erklärung: $\cap$ ist kommutativ, da beim Bilden der Schnittmenge zweier Mengen die Reihenfolge der Notation egal ist. Da also $L_1 \cap L_2 = L_2 \cap L_1$ ist, folgt direkt: $L_1 \cap^c L_2 = (L_1 \cap L_2)^c = (L_2 \cap L_1)^c = L_2 \cap^c L_1$

c) $\cap^c$ ist **nicht** assoziativ.
   Es gilt $(L \cap^c \emptyset) \cap^c \emptyset = A^* \cap^c \emptyset = A^*$, aber $L \cap^c (\emptyset \cap^c \emptyset) = L \cap^c A^* = L^c$

d) Die Operation muss kommutativ, aber **nicht** assoziativ sein.
   Eine Möglichkeit: $L_1 \cup^c L_2 := (L_1 \cup L_2)^c$

e) Gesucht ist eine Operation die **nicht** kommutativ, aber assoziativ ist.
   Eine mögliche Operation ist die in der Vorlesung vorgestellte Konkatenation "$\cdot$":
   $L_1 \cdot L_2 := \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$

f) Beweis analog zum Prinzip der Musterlösung von Aufgabe 3.4:
   (Bedeutung des Zeichens „$\widehat{=}$“ wie in Musterlösung von Aufgabe 3.4)
   Da $L, L^c$ zwei disjunkte, erschöpfende Kategorien sind, lässt sich $x \in L$, bzw. $x \in L^c$ wieder als aussagenlogische Variable modellieren. Hierbei gilt: $x \notin L$, gdw. $x \in L^c$.
   Seien $\mathtt{P}, \mathtt{Q}$ also aussagenlogische Variablen mit $x \in L_1 \widehat{=} \mathtt{P}$, bzw. $x \in L_2 \widehat{=} \mathtt{Q}$.
   Dann gilt: $\neg\mathtt{P} \widehat{=} x \notin L_1$, also $x \in L_1^c$ (analog: $\neg\mathtt{Q} \widehat{=} x \in L_2^c$). Die zu zeigenden Behauptungen lassen sich also wie folgt als aussagenlogische Formeln schreiben:
   - $L_1 \cap L_2 = (L_1^c \cup L_2^c)^c \widehat{=} (\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}) \equiv \neg(\neg\mathtt{P} \vee \neg\mathtt{Q})$
   - $L_1 \cup L_2 = (L_1^c \cap L_2^c)^c \widehat{=} (\mathtt{P} \vee \mathtt{Q}) \equiv \neg(\neg\mathtt{P} \wedge \neg\mathtt{Q})$

   Hierbei nutzen wir wie bei Aufgabe 3.4 aus, dass: $x \in L_1 \cap L_2 \widehat{=} \mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}$, sowie analog $x \in L_1 \cup L_2 \widehat{=} \mathtt{P} \vee \mathtt{Q}$. Die hergestellten aussagenlogischen Formeln gelten offensichtlich, da sie die **De Morgan** Gesetze der Aussagenlogik (Aufgabe 3.3) sind.

**Aufgabe 4.2 (1 + 1 = 2 Punkte)**
Für jede der folgenden Bedingungen $B_i$ (wobei $i \in \{1, 2\}$) sei $L_i$ die Sprache $L_i = \{w \in A^* \mid \text{für } w \text{ gilt } B_i\}$. Geben Sie für jedes $L_i$ einen formalen Mengenausdruck an, der genau $L_i$ beschreibt. Verwenden Sie hierfür *ausschließlich* folgende Zeichen:

$$\mathtt{a} \quad \mathtt{b} \quad \{ \quad \} \quad ( \quad ) \quad , \quad * \quad \cdot \quad \cup$$

Insbesondere dürfen Sie das Zeichen „$\varepsilon$“ nicht verwenden. Andererseits können Sie die leere Menge als „$\{\}$“ notieren.

a) $B_1$: „$|w|$ gerade“
b) $B_2$: „nach jedem ‚b‘ in $w$ folgen mindestens zwei ‚a‘“

**Lösung 4.2**

a) $L_1 = \{\mathtt{aa}, \mathtt{bb}, \mathtt{ab}, \mathtt{ba}\}^*$
b) $L_2 = \{\mathtt{a}, \mathtt{baa}\}^*$

**Aufgabe 4.3 (1 + 2 + 2 + 3 = 8 Punkte)**
Gegeben folgende induktiv definierte Abbildung $\psi : A^* \to A^*$:

$$\psi(\varepsilon) = \varepsilon \qquad \psi(\mathtt{a}) = \mathtt{b} \qquad \psi(\mathtt{b}) = \mathtt{a}$$
$$\psi(wx) = \psi(x) \cdot \psi(w) \qquad \textit{mit } w \in A^+, x \in A$$

Sowie folgende induktiv definierte formale Sprachen $L, L_i \subseteq A^*$:

$$L_0 := \{\varepsilon\} \qquad L_i := \{\mathtt{a}\} \cdot L_{i-1} \cdot \{\mathtt{b}\}, \textit{ mit } i > 0 \qquad L := \cup_{i=0}^{\infty} L_i$$

Als vereinfachte Notation schreiben wir außerdem für eine beliebige Sprache $S \subseteq A^*$:

$$\psi(S) := \{\psi(w) \mid w \in S\}$$

a) Berechnen Sie schrittweise $\psi(\mathtt{aabb})$.
Geben Sie dabei einen Zwischenschritt pro bearbeitetem Zeichen an.
b) Zeigen Sie induktiv: $\psi(x \cdot w) = \psi(w) \cdot \psi(x)$, für alle $x \in A$, $w \in A^*$
c) Zeigen Sie induktiv: $L = \{\mathtt{a}^i \mathtt{b}^i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$
d) Zeigen Sie: $\psi(L) = L$. Kern des Beweises muss eine vollständige Induktion sein.

**Lösung 4.3**
*Anmerkung:* Hier wird eine **alternative Notation** für induktive Beweise nach dem Format: Induktionsanfang (IA), Induktionsvoraussetzung (IV), Induktionsschritt (IS) verwendet.

a) Es gilt: $\psi(\mathtt{aabb}) = \mathtt{a} \cdot \psi(\mathtt{aab}) = \mathtt{aa} \cdot \psi(\mathtt{aa}) = \mathtt{aab} \cdot \psi(\mathtt{a}) = \mathtt{aabb}$
b) zu zeigen: $\psi(x \cdot w) = \psi(w) \cdot \psi(x)$, für alle $x \in A$, $w \in A^*$
Wir zeigen die Behauptung durch vollständige Induktion über die Wortlänge $|w|$:
**IA:** $|w| = 0$, also $w = \varepsilon$:
Es gilt für alle $x \in A$: $\psi(x \cdot \varepsilon) = \psi(x) = \varepsilon \cdot \psi(x) = \psi(\varepsilon) \cdot \psi(x)$
**IV:** für ein beliebiges, aber festes $|w| = n \in \mathbb{N}_0$ gelte die zu zeigende Behauptung
**IS:** $n \to n + 1$, dann gilt: $w = w' \cdot y$, mit $y \in A$, $w \in A^*$ und $|w'| = n$

$\psi(x \cdot w) = \psi(x \cdot w' \cdot y) = \psi(y) \cdot \psi(x \cdot w') \overset{IV}{=} \psi(y) \cdot \psi(w') \cdot \psi(x)$
$= \psi(w' \cdot y) \cdot \psi(x) = \psi(w) \cdot \psi(x)$

Somit ist die Behauptung für alle $x \in A, w \in A^*$ gezeigt.

c) $L = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$

Wir nutzen die Definition von $L$ und zeigen $L_i = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^i\}$, für alle $i \in \mathbb{N}_0$

Durch vollständige Induktion über $i \in \mathbb{N}_0$:

**IA:** $i = 0$

Es gilt: $L_0 = \{\varepsilon\} = \{\mathtt{a}^0\mathtt{b}^0\}$

**IV:** Für ein beliebiges, aber festes $i \in \mathbb{N}_0$ gelte: $L_i = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^i\}$

**IS:** $i \to i + 1$

$L_{i+1} = \{\mathtt{a}\} \cdot L_i \cdot \{\mathtt{b}\} \overset{IV}{=} \{\mathtt{a}\} \cdot \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^i\} \cdot \{\mathtt{b}\} = \{\mathtt{a} \cdot \mathtt{a}^i\mathtt{b}^i \cdot \mathtt{b}\} = \{\mathtt{a}^{i+1}\mathtt{b}^{i+1}\}$

Somit ist $L_i = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^i\}$, für alle $i \in \mathbb{N}_0$ gezeigt.

Daraus folgt: $L := \cup_{i=0}^{\infty} L_i = \cup_{i=0}^{\infty}\{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^i\} = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$.

Damit ist die ursprüngliche Behauptung gezeigt.

d) zu Zeigen: $\psi(L) = L$

Es gilt: $\psi(L) = \{\psi(w) \mid w \in L\}$ und nach Teilaufgabe c): $L = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$.

Also: $\psi(L) = \{\psi(\mathtt{a}^i\mathtt{b}^i) \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ Wir zeigen die Aussage also, indem wir durch vollständige Induktion über $i \in \mathbb{N}_0$ zeigen: $\psi(\mathtt{a}^i\mathtt{b}^i) = \mathtt{a}^i\mathtt{b}^i$, für alle $i \in \mathbb{N}_0$

**IA:** $i = 0$

Es gilt: $\psi(\mathtt{a}^0\mathtt{b}^0) = \psi(\varepsilon) = \varepsilon$ nach Definition von $\psi$

**IV:** Für ein beliebiges, aber festes $i \in \mathbb{N}_0$ gelte die zu zeigende Behauptung

**IS:** $i \to i + 1$

$\psi(\mathtt{a}^{i+1}\mathtt{b}^{i+1}) = \psi(\mathtt{a} \cdot \mathtt{a}^i\mathtt{b}^i \cdot \mathtt{b}) = \psi(\mathtt{b}) \cdot \psi(\mathtt{a} \cdot \mathtt{a}^i\mathtt{b}^i) \overset{b)}{=} \mathtt{a} \cdot \psi(\mathtt{a}^i\mathtt{b}^i) \cdot \psi(\mathtt{a}) \overset{IV}{=} \mathtt{a} \cdot \mathtt{a}^i\mathtt{b}^i \cdot \mathtt{b}$
$= \mathtt{a}^{i+1}\mathtt{b}^{i+1}$

Damit ist $\psi(\mathtt{a}^i\mathtt{b}^i) = \mathtt{a}^i\mathtt{b}^i$ und somit effektiv $\psi(w) = w$, für alle $w \in L$, also $\psi(L) = L$ gezeigt.

**Aufgabe 4.4 (2 Punkte)**

Dr. Meta hat von Beginn an an den Erfolg seines Trading-Algorithmus geglaubt und das bestimmt bald eintreffende Vermögen bereits in der Vergangenheit reinvestiert. Jetzt verfügt er über eine zahlreiche Flotte neuester Spionagedronen, Fabrikat: „Besonders, intelligentes, rastloses Drohnenmodell“ kurz: B.I.R.D. Diese absoluten High-Tech Geräte brauchen noch einen absolut verwechselbaren Tarnanstrich, damit sie sich maximal unauffällig in Schwärmen ihrer biologischen Artgenossen eingliedern und die gesamte Welt ausspähen können. Dazu hat er seinem beinahe besten Logiker B. Scheuert eine Farbanalyse der heimischen Vogelarten aufgetragen. Das Ergebnis ist überraschend: Scheuert hat einen Beweis vorgelegt, nach dem alle Vögel der Welt die gleiche Farbe haben. Welche genau, weiß er leider noch nicht.

Analysieren sie den folgenden „Induktionsbeweis“ und argumentieren Sie basierend auf Ihrem Wissen über vollständige Induktion (und nicht etwa mit Ihrem Wissen über Vögel), wieso dieser fehlerhaft ist.

Zu zeigen: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: In jeder Menge die genaue $n$ Vögel enthält, haben alle Vögel die gleiche Farbe

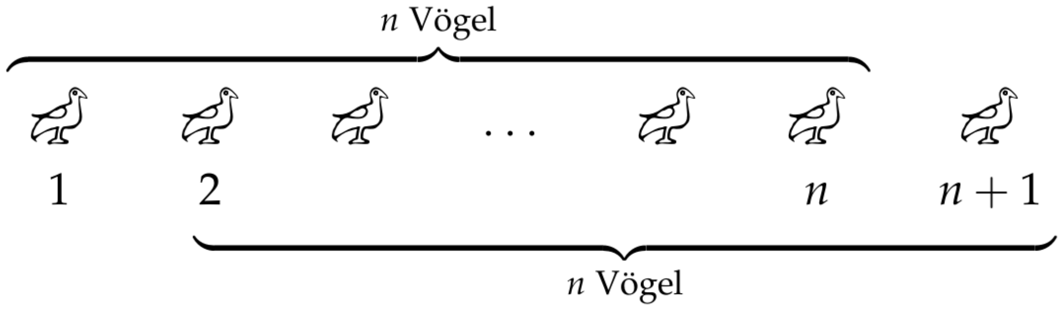
**IA:** $n = 1$

Enthält die Menge genau einen Vogel, haben offensichtlich alle die gleiche Farbe.

**IV:** Für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$ gelte die zu zeigende Behauptung

**IS:** $n \to n+1$

Sei $M$ eine Menge, die genau $n+1$ Vögel enthält. Stellen Sie sich vor, dass die Vögel alle nebeneinander aufgereiht sitzen:




Die Vögel 1, 2, ..., n bilden eine Menge mit genau $n$ Vögeln. Also haben sie nach Induktionsvoraussetzung alle die gleiche Farbe. Die Vögel 2, 3, ..., $n+1$ bilden auch eine Menge mit genau $n$ Vögeln. Also haben nach Induktionsvoraussetzung auch diese alle die gleiche Farbe. Folglich haben auch die Vögel 1 und $n+1$ die gleiche Farbe.

**Lösung 4.4**

Die vom Bild suggerierte Überlappung der beiden Teilmengen ohne den letzten, bzw. ohne den ersten Vogel gibt es nicht immer. Für $n = 2$ beinhalten beide Teilmengen nur jeweils einen Vogel und sind somit disjunkt. Folglich gilt der Induktionsschritt nicht, weshalb die gesamte Induktion formal inkorrekt ist.