# Lösungsvorschläge und Erläuterungen
# Klausur zur Vorlesung
# Grundbegriffe der Informatik
# 6. August 2021

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nachname: | | | | | | | |
| Vorname: | | | | | | | |
| Matr.-Nr.: | | | | | | | |

Diese Klausur ist mein ☐ 1. Versuch ☐ 2. Versuch in GBI

Falls 2. Versuch, bitte `sehr gut lesbar` ausfüllen:

| | |
|---|---|
| Email-Adr.: | |
| Postanschrift: | |

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| max. Punkte | 7 | 6 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 |
| tats. Punkte | | | | | | | |

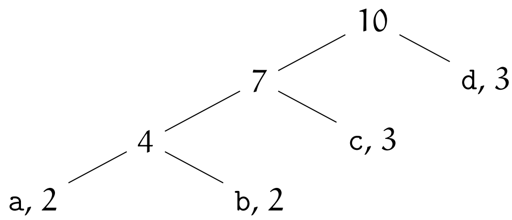
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Gesamtpunktzahl: | / 45 | | Note: | |

/ 7

## Aufgabe 1 (2 + 1 + 1 + 1 + 2 = 7 Punkte)

/ 2

a) Ein Student, der sich noch nicht mit Huffman-Bäumen gut auskennt, hat als „Huffman-Baum“ für $w = \mathtt{a}^2\mathtt{b}^2\mathtt{c}^3\mathtt{d}^3$ folgenden Baum H angegeben:




(i) Beim Erstellen von H hat der Student nicht nur die Kantenbeschriftungen vergessen, sondern noch einen weiteren Fehler gemacht. Erklären Sie, welcher das ist und wie es richtig gewesen wäre.

(ii) Auch bei dem falschen Baum kann man die Kanten mit `0` und `1` beschriften, sodass eine binäre Codierung C entsteht.

Ergänzen Sie den obigen Baum entsprechend und geben Sie die Codierung $C(x)$ für jedes Zeichen $x$ an, das in $w$ vorkommt.

Geben Sie zum Schluss die Codierung des ganzen Wortes $w$ an.

/ 1

b) Eine Funktion $f \colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ heißt *streng monoton wachsend*, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ gilt: $f(n) < f(n+1)$. Man beachte, dass hier „$<$“ gefordert wird, nicht nur „$\leq$“. Geben Sie eine streng monoton wachsende Funktion $f \colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ an, für die gilt: $f \in \Theta(1)$.

/ 1

c) Es sei L die formale Sprache der syntaktisch korrekten Java-Programme.

(i) Geben Sie eine Teilmenge $L_1$ von L an, die entscheidbar ist.

(ii) Geben Sie eine Teilmenge $L_2$ von L an, die *nicht* entscheidbar ist.

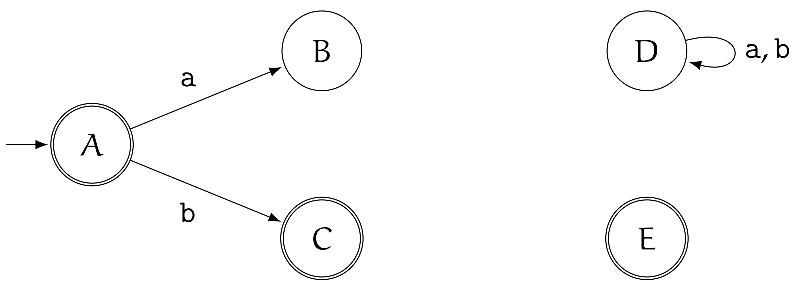
/ 1

d) Es sei F eine aussagenlogische Formel, die unerfüllbar ist. Geben Sie eine aussagenlogische Tautologie an, die F als Teilwort enthält.

/ 2

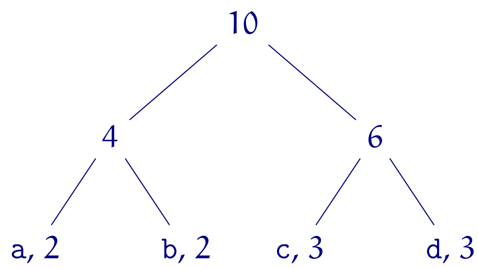
e) Es sei $L \subseteq \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$ die formale Sprache aller Wörter, in denen unmittelbar vor oder unmittelbar nach jedem Vorkommen von `a` ein `b` steht.

Vervollständigen Sie das folgende Diagramm zu einem Akzeptor für L:

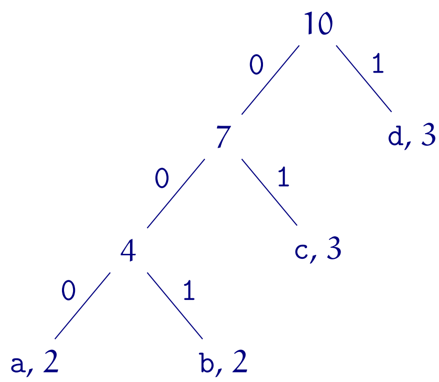


## Lösung 1

a) (i) Der Student hat fälschlicherweise die Knoten 4 und $c, 3$ zusammengeführt. Korrekt wäre stattdessen, die Knoten wie folgt zu verschmelzen:




(ii) Mit den Kantenbeschriftungen sähe der Baum so aus:




Die einzelnen Zeichen werden dann folgendermaßen codiert:

| $x$ | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| $C(x)$ | 000 | 001 | 01 | 1 |

Als Codierung von $w$ ergibt sich $C(w) = (000)^2(001)^2(01)^3 1^3$.

b) Die Aufgabe enthielt leider einen Fehler. Konzipiert wurde sie mit $\mathbb{R}_+$ (und nicht $\mathbb{N}_+$) als Wertebereich für $f$. Eine korrekte Lösung wäre dann z. B. $f(n) = 1 + \frac{1}{n}$.

Da die Aufgabe wie gestellt unlösbar war, wurde bei der Korrektur allen Teilnehmern 1P gegeben.

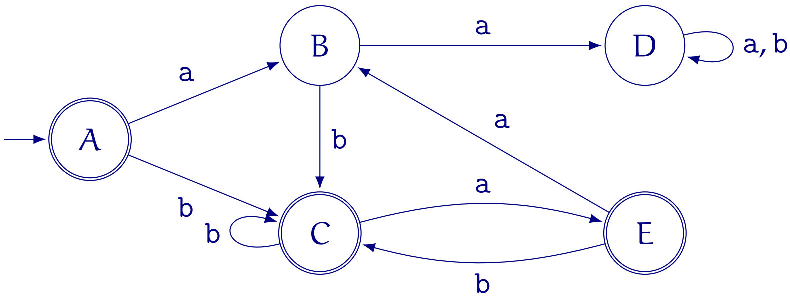
c) (i) Beispiele für $L_1$: $L$ oder $\varnothing$

(ii) Beispiele für $L_2$:

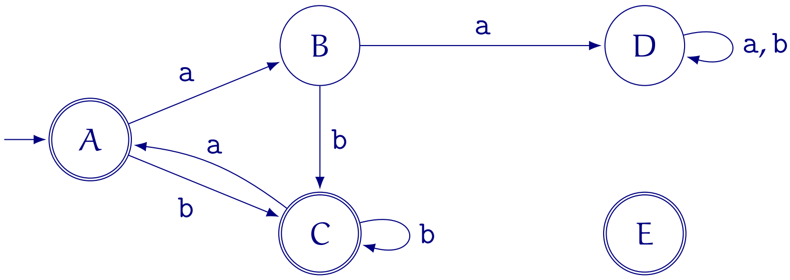
- die Menge aller Java-Programmen, die für jede Eingabe halten
- die Menge aller Java-Programmen, die zwei Zahlen korrekt addieren

d) z. B. $(F) \rightarrow (F)$ oder $\neg (F)$

e)




oder alternative Lösung:



/ 6

## Aufgabe 2 (1 + 1 + 1 + 3 = 6 Punkte)

Es sei $T = \{a, b\}$ und L die formale Sprache $L = \{a^k b^m \mid k, m \in \mathbb{N}_0 \wedge k \neq m\}$.

/ 1

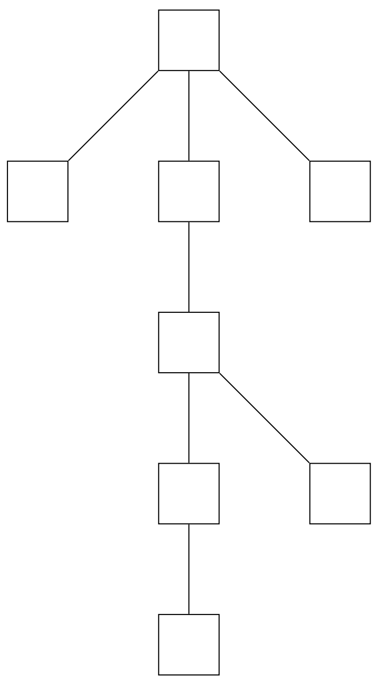
a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik $G = (N, T, S, P)$ mit höchstens 4 Nichtterminalsymbolen an, die $L(G) = L$ erzeugt.

Wählen Sie die Produktionen möglichst so, dass

- Sie die Darstellung in Teilaufgabe b) zu einem Ableitungsbaum des Wortes abbb ergänzen können (sonst ist Teilaufgabe b) nicht lösbar) und
- dass jedes Wort aus L möglichst nur genau einen Ableitungsbaum besitzt (dann ist Teilaufgabe c) vermutlich einfacher).

/ 1

b) Ergänzen Sie die folgende Darstellung zu einem Ableitungsbaum des Wortes abbb gemäß Ihrer Grammatik.



/ 1

c) Was ist die kleinste Zahl innerer Knoten, die ein Ableitungsbaum eines Wortes $a^k b^m \in L$ gemäß Ihrer Grammatik aus Teilaufgabe a) in Abhängigkeit von k und m hat?

/ 3

d) Für $w \in T^*$ sei

$$M_w = \{w' \in T^* \mid ww' \in L\}$$

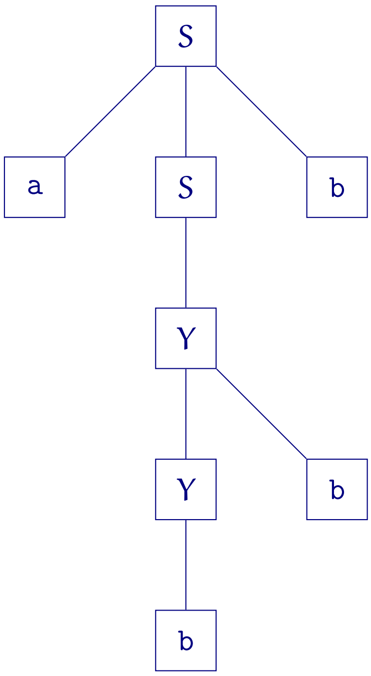
Geben Sie für jedes $w \in T^*$ die Menge $M_w$ konkret an.

*Tipp:* Machen Sie eine Fallunterscheidung in Abhängigkeit von der Struktur von $w$.

## Lösung 2

a) $G = (T, \{S, X, Z\}, S, P)$ mit Produktionenmenge
$P = \{S \to \mathtt{aSb} \mid X \mid Y\ ,\ X \to \mathtt{aX} \mid \mathtt{a}\ ,\ Y \to Y\mathtt{b} \mid \mathtt{b}\}$

b)




c) $1 + \max(k, m)$

d)
- wenn $\mathtt{ba}$ Teilwort von $w$, dann $M_w = \varnothing$
- wenn $w = \mathtt{a}^x$ mit $x \in \mathbb{N}_0$, dann $M_w = \{\mathtt{a}^k\mathtt{b}^m \mid k + x \neq m\}$
- wenn $w = \mathtt{a}^x\mathtt{b}^y$ mit $y \in \mathbb{N}_+$, dann $M_w = \{\mathtt{b}^m \mid x \neq m + y\}$

/ 6

## Aufgabe 3 (1 + 2 + 1 + 1 + 1 = 6 Punkte)

Es sei $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. Für eine Abbildung $f\colon A^* \to A^*$ sei festgelegt:

$$\begin{aligned} \forall w \in A^0 \cup A^1 &: f(w) = w \\ \forall w \in A^* &: f(\mathtt{aa}w) = \mathtt{a}\, f(\mathtt{a}w) \\ \forall w \in A^* &: f(\mathtt{ab}w) = \quad f(w) \\ \forall w \in A^* &: f(\mathtt{ba}w) = \quad f(w) \\ \forall w \in A^* &: f(\mathtt{bb}w) = \mathtt{b}\, f(\mathtt{b}w) \end{aligned}$$

/ 1

a) Berechnen Sie schrittweise $f(\mathtt{abab})$ und $f(\mathtt{bbaa})$.

/ 2

b) Ein $w \in A^*$ heißt ein *Fixpunkt* von $f$, wenn $f(w) = w$ ist.

(i) Geben Sie die Menge $M$ aller Fixpunkte von $f$ an.

(ii) Begründen Sie, warum jedes Wort in $M$ Fixpunkt ist.

(iii) Begründen Sie, warum jedes Wort in $A^* \setminus M$ kein Fixpunkt ist.

Die Abbildung $F\colon A^* \to A^*$ sei definiert durch

$$F(w) = \begin{cases} w & \text{falls } f(w) = w \\ F(f(w)) & \text{falls } f(w) \neq w \end{cases}$$

/ 1

c) Berechnen Sie schrittweise $F(\mathtt{bbaaabab})$.

Ergebnisse aus den Teilaufgaben a) und b) dürfen sie direkt einsetzen.

/ 1

d) Es sei $w \in A^*$ beliebig.

Begründen Sie, warum $F(w)$ definiert ist.

*Hinweis.* Betrachten Sie die Folge der Wörter mit $w_0 = w$ und für $i \in \mathbb{N}_0$: $w_{i+1} = f(w_i)$. Sie dürfen Teilaufgabe b) verwenden.

/ 1

e) Geben Sie für jedes $w \in A^*$ an, welchen Wert $F(w)$ hat.

*Hinweis.* Notieren Sie die Anzahl Vorkommen eines Symbols $x \in A$ im Wort $w$ mit „$N_x(w)$“.

## Lösung 3

a) $$\begin{aligned} f(\mathtt{abab}) &= f(\mathtt{ab}) \\ &= f(\varepsilon) \\ &= \varepsilon \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f(\mathtt{bbaa}) &= \mathtt{b} \cdot f(\mathtt{baa}) \\ &= \mathtt{b} \cdot f(\mathtt{a}) \\ &= \mathtt{ba} \end{aligned}$$

b) (i) $M = \{\mathtt{a}\}^* \cup \{\mathtt{b}\}^*$

(ii) Sei $x \in A$ und $w = x^n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Wenn $n \leq 1$, dann ist $w$ Fixpunkt nach Definition von $f$.

Sei $n \geq 1$. Wenn $x^n$ Fixpunkt ist, dann ist $f(x^{n+1}) = x \cdot f(x^n) = x \cdot x^n = x^{n+1}$, also $x^{n+1}$ auch Fixpunkt.

(iii) Jedes $w \in A^* \setminus M$ enthält $\mathtt{ab}$ oder $\mathtt{ba}$ als Teilwort. Bei der iterierten Anwendung von $f$ wird irgendwann das linkeste Vorkommen gelöscht. Der Funktionswert wird also echt kürzer und das Argument kann nicht Fixpunkt sein.

c) $$\begin{aligned} F(\mathtt{bbaaabab}) &= F(\mathtt{baabab}) \\ &= F(\mathtt{abab}) \\ &= F(\varepsilon) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

d) Wie in Teilaufgabe b) argumentiert, ist für jedes $w$, das *nicht* Fixpunkt ist, $f(w)$ echt kürzer als $w$. Wenn $|w| = |f(w)|$ ist, dann ist sogar $w = f(w)$ Fixpunkt.

Die Folge der Wortlängen ist $|w_0| \geq |w_1| \geq |w_2| \geq \cdots$ und nach unten beschränkt. Also gilt für irgendein $i$: $|w_i| = |w_{i+1}| = |f(w_i)|$. Das bedeutet, dass $w_i$ Fixpunkt von $f$ ist. Sei $n$ das kleinste solche $i$.

Dann gilt für $i < n$: $F(w_i) = F(f(w_i)) = F(w_{i+1})$ und $F(w_n) = w_n$, also ist $F(w) = w_n$ definiert.

e) $$F(w) = \begin{cases} \mathtt{a}^x, & \text{falls } x = N_{\mathtt{a}}(w) - N_{\mathtt{b}}(w) \geq 0 \\ \mathtt{b}^x, & \text{falls } x = N_{\mathtt{b}}(w) - N_{\mathtt{a}}(w) \geq 0 \end{cases}$$

/ 6

## Aufgabe 4 (1 + 1 + 2 + 2 = 6 Punkte)

In dieser Aufgabe geht es um gerichtete Graphen $G = (V, E)$. Mit $n_G \in \mathbb{N}_+$ wird die Anzahl der Knoten von $G$ bezeichnet. Die Knotenmenge sei stets $V = \mathbb{Z}_{n_G}$. Ferner sei $A$ die Adjazenz- und $W$ die Wegematrix von $G$.

/ 1

a) Es sei $n_G = 4$, also $V = \mathbb{Z}_4$ und $E = \{(x, y) \in V \times V \mid x \cdot y \text{ ist ungerade}\}$. Geben Sie $A$ und $W$ explizit an. Kennzeichen Sie deutlich, welche Matrix $A$ und welche $W$ ist.

Es sei nun $G$ beliebig. Für $i, j \in \mathbb{Z}_{n_G}$ sei $W_{ij}$ der Eintrag in Zeile $i$ und Spalte $j$ der Wegematrix $W$ von $G$. Zudem sei

$$f_W(G) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} W_{ij}.$$

/ 1

b) Geben Sie Funktionen $q\colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_0$ und $Q\colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_0$ an, sodass

1. für jeden Graphen $G$ gilt: $q(n_G) \leq f_W(G) \leq Q(n_G)$ und
2. jede der Ungleichungen möglichst scharf ist.
   Das bedeutet, dass es für jedes $n$ einen Graphen $G$ mit $n$ Knoten geben muss, sodass $q(n) = f_W(G)$ ist, und dass es für jedes $n$ einen Graphen $G$ mit $n$ Knoten geben muss, sodass $Q(n) = f_W(G)$ ist.

Nehmen Sie dabei keinen Bezug auf die Kantenmenge $E$.

Im Folgenden schränken wir die Graphen ein: $G$ sei nun immer ein *Baum*.

/ 2

c) Geben Sie Funktionen $b\colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_0$ und $B\colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_0$ an, sodass

1. für jeden *Baum* $G$ gilt: $b(n_G) \leq f_W(G) \leq B(n_G)$ und
2. jede der Ungleichungen möglichst scharf ist.

Nehmen Sie dabei keinen Bezug auf die Kantenmenge $E$.

/ 2

d) Zeigen Sie, dass die von Ihnen angegebenen Schranken für $n = 5$ scharf sind. Geben Sie also Kantenmengen $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ an, sodass Folgendes gilt:

- $G_1 = (\mathbb{Z}_5, E_1)$ ist ein Baum und $f_W(G_1) = b(5)$.
- $G_2 = (\mathbb{Z}_5, E_2)$ ist ein Baum und $f_W(G_2) = B(5)$.

## Lösung 4

a)

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{und} \quad W = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) $q(n_G) = n_G$ und $Q(n_G) = n_G^2$

Diese Grenzen werden z. B. vom leeren Graphen ($E = \emptyset$) und von streng zusammenhängenden Graphen (z. B. $E = V^2$) angenommen.

c) $b(n_G) = 2n_G - 1$ und $B(n_G) = \frac{n_G(n_G+1)}{2}$

Diese Grenzen werden vom Stern- und vom Pfadgraphen angenommen (siehe die Lösung zur nächsten Teilaufgabe).

d) $E_1 = \{(0, i) \mid i \in \{1, 2, 3, 4\}\}$ und $E_2 = \{(i, i + 1) \mid i \in \mathbb{Z}_4\}$

Diese Lösung ist bis auf Knotenumbenennungen eindeutig.

| / 6 | **Aufgabe 5 (2 + 3 + 1 = 6 Punkte)** |
|---|---|

Es sei $G = (N, T, S, P)$ eine kontextfreie Grammatik. Außerdem benutzen wir die Abkürzung $V = N \cup T$.

/ 2

a) Es sei $N = \{S, X\}$, $T = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ und $P = \{S \to \mathtt{a}X \mid \varepsilon\ ,\ \ X \to \mathtt{aa}X \mid \mathtt{b}S\}$.

(i) Mit dieser Produktionsmenge P hat G eine wichtige Eigenschaft, die (wie Sie in der Vorlesung kennengelernt haben) garantiert, dass es einen regulären Ausdruck R mit $\langle R \rangle = L(G)$ gibt.
Wie heißt diese Eigenschaft? Wie ist sie genau definiert?

(ii) Geben Sie einen regulären Ausdruck R, sodass $\langle R \rangle = L(G)$ ist.

Die Mengen N, T und P seien jetzt wieder beliebig.

/ 3

b) Für G gelte die folgende Eigenschaft:

⊛ Für jede Produktion der Form $S \to w$ mit $w \in V^*$ gibt es ein $i \in \mathbb{Z}_{|w|}$, sodass $w(i) = S$ ist.

Zeigen Sie, dass für jedes Wort $w \in V^*$ mit $S \Rightarrow^* w$ gilt:
Es gibt $i \in \mathbb{Z}_{|w|}$, sodass $w(i) = S$ ist.

Beweisen Sie dazu mittels vollständiger Induktion über n:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \colon \forall w \in V^* \colon \ \text{wenn } S \Rightarrow^n w, \text{ dann kommt in } w \text{ Symbol } S \text{ vor}$$

Markieren Sie in Ihrem Beweis deutlich die Stelle, an der Sie die Bedingung ⊛ benutzen.

/ 1

c) Warum folgt aus Teilaufgabe b), dass für jedes G, das ⊛ erfüllt, die Sprache $L(G)$ leer ist?

## Lösung 5

a)
- Alle Produktionen sind rechtslinear. Das bedeutet, dass auf der rechten Seite jeder Produktion höchtens ein Nichtterminalsymbol vorkommt, wenn das der Fall ist, dann ist dieses Nichtterminalsymbol das letzte Zeichen der rechten Seite.
- $R = \mathtt{(a(aa)*b)*}$

b) **Induktionsanfang** $n = 0$: zu zeigen: Wenn $S \Rightarrow^0 w$, dann kommt in $w$ Symbol S vor. Wenn $S \Rightarrow^0 w$, dann ist nach Definition von $\Rightarrow^0$: $w = S$; also kommt in $w$ Symbol S vor.

**Induktionsschritt** $n \rightsquigarrow n+1$:

**Induktionsvoraussetzung**: Für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte für jedes $w \in V^*$: Wenn $S \Rightarrow^n w$, dann kommt in $w$ Symbol $S$ vor.

Zu zeigen: Für jedes $w \in V^*$ gilt: Wenn $S \Rightarrow^{n+1} w$, dann kommt in $w$ Symbol $S$ vor.

Wenn $S \Rightarrow^{n+1} w$, dann gibt es ein Wort $w' \in V^*$ mit $S \Rightarrow^n w' \Rightarrow w$. Nach Induktionsvoraussetzung kommt in $w'$ Symbol $S$ vor. Für den letzten Ableitungsschritt $w' \Rightarrow w$ gibt es zwei Fälle:

- *Kein* Vorkommen von $S$ in $w'$ wird ersetzt. Dann bleibt das nach IV vorhandene $S$ unverändert und kommt auch in $w$ vor.
- Ein Vorkommen von $S$ in $w'$ *wird* ersetzt; dann wird dieses $S$ nach Voraussetzung $\circledast$ durch ein Wort ersetzt, wiederum $S$ enthält. Also enthält dann $w$ auch wieder Symbol $S$.

c) Wenn in jedem aus $S$ ableitbaren Wort $w$ wieder das Nichtterminalsymbol $S$ vorkommt, dann ist stets $w \notin T^*$, also ist $L(G) \subseteq T^*$ die leere Sprache.

/ 7 **Aufgabe 6 (1 + 1 + 1 + 2 + 2 = 7 Punkte)**

Es sei $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. Eine binäre Relation $\sqsubseteq$ auf $A^*$ sei definiert durch die Festlegung:

$$\forall w_1, w_2 \in A^* : w_1 \sqsubseteq w_2 \text{ genau dann, wenn } \exists v_1 \in A^* : w_1 v_1 = w_2$$

Wenn $w_1 \sqsubseteq w_2$ ist, heißt $w_1$ ein Präfix von $w_2$.

/ 1

a) Zeigen Sie, dass die Relation $\sqsubseteq$ reflexiv und transitiv ist.

Für $L \subseteq A^*$ sei $p(L) = \{w' \in A^* \mid \exists w \in L : w' \sqsubseteq w\}$ die Sprache aller Präfixe der Wörter aus L.

/ 1

b) Geben Sie ein $L \subseteq A^*$ an, für das $A^* \setminus L$ unendlich und $p(L) = A^*$ ist.

*Tipp*. Man kann sich darauf beschränken, eine Sprache zu suchen, die für jede Wortlänge entweder alle Wörter enthält oder gar keines.

/ 1

c) Geben Sie ein $L \subseteq A^*$ an, für das sowohl $p(L)$ als auch $A^* \setminus p(L)$ unendlich ist.

/ 2

d) Die Sprache L sei regulär. Das heißt, es existiert ein endlicher Automat B mit Zustandsmenge $Z_B$, Anfangszustand $z_{B0} \in Z_B$, Zustandsüberführungsfunktion $f_B \colon Z_B \times A \to Z_B$ und Menge akzeptierender Zustände $F_B \subseteq Z_B$, sodass $L(B) = L$ ist.

Geben Sie explizit einen endlichen Automaten C an, sodass $L(C) = p(L)$ ist.

/ 2

e) Die formalen Sprachen $L_1, L_2 \subseteq A^*$ seien beide nicht leer. Zeigen Sie:

(i) $p(L_1) \subseteq p(L_1 \cdot L_2)$

(ii) $L_1 \cdot p(L_2) \subseteq p(L_1 \cdot L_2)$

Kennzeichnen Sie die Stelle(n) in Ihren Beweisen, an denen Sie die Voraussetzung $L_2 \neq \emptyset$ benötigen.

## Lösung 6

a)
- Für jedes $w_1 \in A^*$ ist $w_1 \varepsilon = w_1$, also ist $w_1 \sqsubseteq w_1$.
- Wenn $w_1 \sqsubseteq w_2$ und $w_2 \sqsubseteq w_3$, dann gibt es Wörter $v_1$ und $v_2$ mit $w_1 v_1 = w_2$ und $w_2 v_2 = w_3$. Also ist $w_1(v_1 v_2) = w_2 v_2 = w_3$, das heißt $w_1 \sqsubseteq w_3$.

b) Beispiele für L:

- die Menge aller Wörter gerader Länge über $A$, also $L = (A^2)^*$
- die Menge aller Palindrome über $A$

c) Beispiele für L: $\{\mathtt{a}\}^*$ oder $\{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$

d) $Z_C = Z_B$, $z_{C0} = z_{B0}$, $f_B = f_C$ und

$$F_C = \left\{ z \in Z_c \,\middle|\, \exists w \in A^* : \begin{array}{l} \text{von Zustand } z \text{ aus geht C bei Eingabe } w \\ \text{in einen Zustand aus } F_B \text{ über} \end{array} \right\}$$

e) (i) Es sei $w \in p(L_1)$. Nach Definition gibt es $w_1 \in L_1$, sodass $w \sqsubseteq w_1$ ist. Da $L_2$ nicht leer ist (!), so gibt es auch $w_2$ mit $w_1 \cdot w_2 \in L_1 \cdot L_2$. Es gilt $w_1 \sqsubseteq w_1 \cdot w_2$ und mit der Transitivität $w \sqsubseteq w_1 \cdot w_2$. Also ist $w \in p(L_1 \cdot L_2)$.

(ii) Es sei $w \in L_1 \cdot p(L_2)$. Es gibt damit $w_1 \in L_1$ und $w' \in p(L_2)$, sodass $w = w_1 \cdot w'$ ist. Wiederum gibt es nach Definition $w_2 \in L_2$, sodass $w' \sqsubseteq w_2$ ist. Damit ist $w \sqsubseteq w_1 \cdot w_2$ und, da $w_1 \cdot w_2 \in L_1 \cdot L_2$ ist, ist also $w \in p(L_1 \cdot L_2)$.

/ 7

## Aufgabe 7 (2 + 1 + 2 + 2 = 7 Punkte)

Es sei $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ und $w \in A^+$ ein Wort. Eine Turingmaschine $T$ heißt ein *Drucker* für $w$, falls $T$ bei Eingabewort $\varepsilon$ in einer Konfiguration $c$ *hält*, in der das Wort $w$ auf dem Band umgeben nur von Leersymbolen steht. Genauer: Es soll $i \in \mathbb{Z}$ existieren, sodass für die Bandbeschriftung $b$ von $c$ gilt:

$$\forall j \in \mathbb{Z}: \ b(i+j) = \begin{cases} w(j), & j \in \mathbb{Z}_{|w|} \\ \square, & \text{sonst} \end{cases}$$

Zum Beispiel ist folgende Turingmaschine $T_{\mathtt{aba}}$ ein Drucker für das Wort $\mathtt{aba}$:

$$\to (0) \xrightarrow{\square \mid \mathtt{a}R} (1) \xrightarrow{\square \mid \mathtt{b}R} (2) \xrightarrow{\square \mid \mathtt{a}R} (3)$$

/ 2

a) Simulieren Sie $T_{\mathtt{aba}}$ bei Eingabe $\varepsilon$. Geben Sie die Anfangskonfiguration sowie die Konfiguration nach jedem Schritt von $T_{\mathtt{aba}}$ bildlich an. Aus jeder Konfiguration sollen dabei die Bandbeschriftung, der aktuelle Zustand von $T_{\mathtt{aba}}$ und die Position des Schreib-Lese-Kopfes hervorgehen.

   Begründen Sie anschließend kurz, warum $T_{\mathtt{aba}}$ in der letzten dargestellten Konfiguration anhält.

Es sei jetzt $w \in A^+$ beliebig und $T_w$ ein Drucker für $w$, dessen Zustandsmenge gleich $\mathbb{Z}_n$ für ein $n \in \mathbb{N}_+$ ist, also genau $n$ Zustände besitzt. Der Startzustand von $T_w$ sei stets $0$.

/ 1

b) Zeigen Sie: Für jedes $w \in A^+$ gibt es einen Drucker $T_w$ mit $n \leq |w| + 1$.

   *Hinweis.* Seien Sie in dieser und den folgenden Teilaufgaben hinreichend präzise. Lösungen „mit Pünktchen“ werden nicht akzeptiert.

/ 2

c) Zeigen Sie: Für jedes solche $w$ gibt es einen Drucker $T_w$ mit $n \leq |w|$.

   *Tipp.* Wie könnte man bei $T_{\mathtt{aba}}$ den Zustand 3 einsparen?

/ 2

d) Zeigen Sie, dass es für ein Wort $w$ der Länge $|w| = 4$ einen Drucker $T_w$ mit $n = 3$ gibt.

   *Tipp 1.* Ergänzen Sie die folgende Turingmaschine so, dass die Zustände 0 und 1 mindestens zweimal besucht werden.

$$\to (0) \xrightarrow{\square \mid \mathtt{a}R} (1) \xrightarrow{\square \mid \mathtt{a}R} (2)$$

   *Tipp 2.* Der Schreib-Lese-Kopf darf sich nicht nur nach rechts, sondern auch nach links bewegen.

## Lösung 7

a) Simulation:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 0 | | | |
| □ | □ | □ | □ | □ |
| | | 1 | | |
| □ | a | □ | □ | □ |
| | | | 2 | |
| □ | a | b | □ | □ |
| | | | | 3 |
| □ | a | b | a | □ |

Die Turingmaschine hält, weil $f(3, \square)$ nicht definiert ist.

b) Die Zustandsüberführungsfunktion $f$, Ausgabefunktion $g$ und Bewegungsfunktion $m$ von $T_w$ seien für $i \in \mathbb{Z}_{|w|}$ wie folgt festgelegt:

$$
\begin{aligned}
f(i, \square) &= i + 1 \\
g(i, \square) &= w(i) \\
m(i, \square) &= R
\end{aligned}
$$

Alle andere Übergänge sind undefiniert.

c) Es seien $f$, $g$ und $m$ wie in der vorherigen Teilaufgabe. Wir ändern die Übergänge bei Zustand $n - 2 = |w| - 1$ folgendermaßen:

$$
\begin{aligned}
f(n-2, \square) &= n - 2 \\
g(n-2, \square) &= w(n-2) \\
m(n-2, \square) &= 0
\end{aligned}
$$

Der Zustand $n - 1 = |w|$ ist dann nicht mehr erreichbar und darf entfernt werden.

d)