Klausur zur Vorlesung
Grundbegriffe der Informatik
6. August 2021

Nachname:							
Vorname:							
Matr.-Nr.:							

Diese Klausur ist mein ☐ 1. Versuch ☐ 2. Versuch in GBI

Falls 2. Versuch, bitte `sehr gut lesbar` ausfüllen:

Email-Adr.:	
Postanschrift:	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
max. Punkte	7	6	6	6	6	7	7
tats. Punkte							

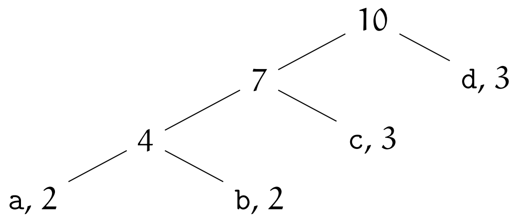
Gesamtpunktzahl:	/ 45		Note:	

/ 7

Aufgabe 1 (2 + 1 + 1 + 1 + 2 = 7 Punkte)

/ 2

a) Ein Student, der sich noch nicht mit Huffman-Bäumen gut auskennt, hat als „Huffman-Baum“ für $w = \mathtt{a}^2\mathtt{b}^2\mathtt{c}^3\mathtt{d}^3$ folgenden Baum H angegeben:



(i) Beim Erstellen von H hat der Student nicht nur die Kantenbeschriftungen vergessen, sondern noch einen weiteren Fehler gemacht. Erklären Sie, welcher das ist und wie es richtig gewesen wäre.

(ii) Auch bei dem falschen Baum kann man die Kanten mit `0` und `1` beschriften, sodass eine binäre Codierung C entsteht.

Ergänzen Sie den obigen Baum entsprechend und geben Sie die Codierung $C(x)$ für jedes Zeichen x an, das in w vorkommt.

Geben Sie zum Schluss die Codierung des ganzen Wortes w an.

/ 1

b) Eine Funktion $f\colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ heißt *streng monoton wachsend*, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ gilt: $f(n) < f(n+1)$. Man beachte, dass hier „$<$“ gefordert wird, nicht nur „$\leq$“. Geben Sie eine streng monoton wachsende Funktion $f\colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ an, für die gilt: $f \in \Theta(1)$.

/ 1

c) Es sei L die formale Sprache der syntaktisch korrekten Java-Programme.

(i) Geben Sie eine Teilmenge L_1 von L an, die entscheidbar ist.

(ii) Geben Sie eine Teilmenge L_2 von L an, die *nicht* entscheidbar ist.

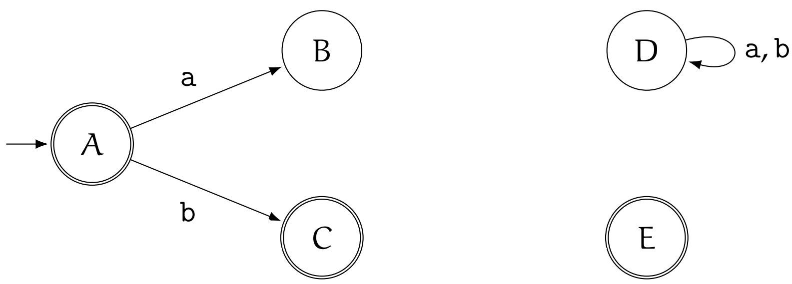
/ 1

d) Es sei F eine aussagenlogische Formel, die unerfüllbar ist. Geben Sie eine aussagenlogische Tautologie an, die F als Teilwort enthält.

/ 2

e) Es sei $L \subseteq \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$ die formale Sprache aller Wörter, in denen unmittelbar vor oder unmittelbar nach jedem Vorkommen von `a` ein `b` steht.

Vervollständigen Sie das folgende Diagramm zu einem Akzeptor für L:



Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 1:

/ 6

Aufgabe 2 (1 + 1 + 1 + 3 = 6 Punkte)

Es sei $T = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ und L die formale Sprache $L = \{\mathtt{a}^k \mathtt{b}^m \mid k, m \in \mathbb{N}_0 \wedge k \neq m\}$.

/ 1

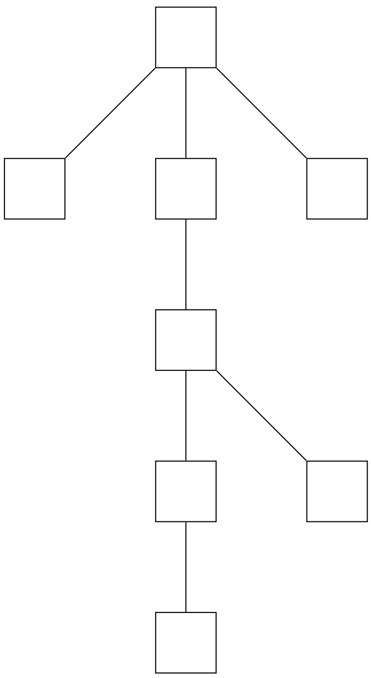
a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik $G = (N, T, S, P)$ mit höchstens 4 Nichtterminalsymbolen an, die $L(G) = L$ erzeugt.

Wählen Sie die Produktionen möglichst so, dass

- Sie die Darstellung in Teilaufgabe b) zu einem Ableitungsbaum des Wortes abbb ergänzen können (sonst ist Teilaufgabe b) nicht lösbar) und
- dass jedes Wort aus L möglichst nur genau einen Ableitungsbaum besitzt (dann ist Teilaufgabe c) vermutlich einfacher).

/ 1

b) Ergänzen Sie die folgende Darstellung zu einem Ableitungsbaum des Wortes abbb gemäß Ihrer Grammatik.



/ 1

c) Was ist die kleinste Zahl innerer Knoten, die ein Ableitungsbaum eines Wortes $\mathtt{a}^k \mathtt{b}^m \in L$ gemäß Ihrer Grammatik aus Teilaufgabe a) in Abhängigkeit von k und m hat?

/ 3

d) Für $w \in T^*$ sei

$$M_w = \{w' \in T^* \mid ww' \in L\}$$

Geben Sie für jedes $w \in T^*$ die Menge M_w konkret an.

Tipp: Machen Sie eine Fallunterscheidung in Abhängigkeit von der Struktur von w.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 2:

/ 6

Aufgabe 3 (1 + 2 + 1 + 1 + 1 = 6 Punkte)

Es sei $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. Für eine Abbildung $f\colon A^* \to A^*$ sei festgelegt:

$$\begin{aligned}
\forall w \in A^0 \cup A^1 &: f(w) = w \\
\forall w \in A^* &: f(\mathtt{aa}w) = \mathtt{a}\, f(\mathtt{a}w) \\
\forall w \in A^* &: f(\mathtt{ab}w) = \quad f(w) \\
\forall w \in A^* &: f(\mathtt{ba}w) = \quad f(w) \\
\forall w \in A^* &: f(\mathtt{bb}w) = \mathtt{b}\, f(\mathtt{b}w)
\end{aligned}$$

/ 1

a) Berechnen Sie schrittweise $f(\mathtt{abab})$ und $f(\mathtt{bbaa})$.

/ 2

b) Ein $w \in A^*$ heißt ein *Fixpunkt* von f, wenn $f(w) = w$ ist.

(i) Geben Sie die Menge M aller Fixpunkte von f an.

(ii) Begründen Sie, warum jedes Wort in M Fixpunkt ist.

(iii) Begründen Sie, warum jedes Wort in $A^* \setminus M$ kein Fixpunkt ist.

Die Abbildung $F\colon A^* \to A^*$ sei definiert durch

$$F(w) = \begin{cases} w & \text{falls } f(w) = w \\ F(f(w)) & \text{falls } f(w) \neq w \end{cases}$$

/ 1

c) Berechnen Sie schrittweise $F(\mathtt{bbaaabab})$.

Ergebnisse aus den Teilaufgaben a) und b) dürfen sie direkt einsetzen.

/ 1

d) Es sei $w \in A^*$ beliebig.

Begründen Sie, warum $F(w)$ definiert ist.

Hinweis. Betrachten Sie die Folge der Wörter mit $w_0 = w$ und für $i \in \mathbb{N}_0$: $w_{i+1} = f(w_i)$. Sie dürfen Teilaufgabe b) verwenden.

/ 1

e) Geben Sie für jedes $w \in A^*$ an, welchen Wert $F(w)$ hat.

Hinweis. Notieren Sie die Anzahl Vorkommen eines Symbols $x \in A$ im Wort w mit „$N_x(w)$“.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 3:

/ 6	**Aufgabe 4 (1 + 1 + 2 + 2 = 6 Punkte)**

In dieser Aufgabe geht es um gerichtete Graphen $G = (V, E)$. Mit $n_G \in \mathbb{N}_+$ wird die Anzahl der Knoten von G bezeichnet. Die Knotenmenge sei stets $V = \mathbb{Z}_{n_G}$. Ferner sei A die Adjazenz- und W die Wegematrix von G.

/ 1

a) Es sei $n_G = 4$, also $V = \mathbb{Z}_4$ und $E = \{(x, y) \in V \times V \mid x \cdot y \text{ ist ungerade}\}$. Geben Sie A und W explizit an. Kennzeichen Sie deutlich, welche Matrix A und welche W ist.

Es sei nun G beliebig. Für $i, j \in \mathbb{Z}_{n_G}$ sei W_{ij} der Eintrag in Zeile i und Spalte j der Wegematrix W von G. Zudem sei

$$f_W(G) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} W_{ij}.$$

/ 1

b) Geben Sie Funktionen $q \colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_0$ und $Q \colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_0$ an, sodass

1. für jeden Graphen G gilt: $q(n_G) \leq f_W(G) \leq Q(n_G)$ und
2. jede der Ungleichungen möglichst scharf ist.

   Das bedeutet, dass es für jedes n einen Graphen G mit n Knoten geben muss, sodass $q(n) = f_W(G)$ ist, und dass es für jedes n einen Graphen G mit n Knoten geben muss, sodass $Q(n) = f_W(G)$ ist.

Nehmen Sie dabei keinen Bezug auf die Kantenmenge E.

Im Folgenden schränken wir die Graphen ein: G sei nun immer ein *Baum*.

/ 2

c) Geben Sie Funktionen $b \colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_0$ und $B \colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_0$ an, sodass

1. für jeden *Baum* G gilt: $b(n_G) \leq f_W(G) \leq B(n_G)$ und
2. jede der Ungleichungen möglichst scharf ist.

Nehmen Sie dabei keinen Bezug auf die Kantenmenge E.

/ 2

d) Zeigen Sie, dass die von Ihnen angegebenen Schranken für $n = 5$ scharf sind. Geben Sie also Kantenmengen $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ an, sodass Folgendes gilt:

- $G_1 = (\mathbb{Z}_5, E_1)$ ist ein Baum und $f_W(G_1) = b(5)$.
- $G_2 = (\mathbb{Z}_5, E_2)$ ist ein Baum und $f_W(G_2) = B(5)$.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 4:

/ 6 **Aufgabe 5 (2 + 3 + 1 = 6 Punkte)**

Es sei $G = (N, T, S, P)$ eine kontextfreie Grammatik. Außerdem benutzen wir die Abkürzung $V = N \cup T$.

/ 2

a) Es sei $N = \{S, X\}$, $T = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ und $P = \{S \to \mathtt{a}X \mid \varepsilon\ ,\ \ X \to \mathtt{aa}X \mid \mathtt{b}S\}$.

(i) Mit dieser Produktionsmenge P hat G eine wichtige Eigenschaft, die (wie Sie in der Vorlesung kennengelernt haben) garantiert, dass es einen regulären Ausdruck R mit $\langle R \rangle = L(G)$ gibt.

Wie heißt diese Eigenschaft? Wie ist sie genau definiert?

(ii) Geben Sie einen regulären Ausdruck R, sodass $\langle R \rangle = L(G)$ ist.

Die Mengen N, T und P seien jetzt wieder beliebig.

/ 3

b) Für G gelte die folgende Eigenschaft:

$\circledast$ Für jede Produktion der Form $S \to w$ mit $w \in V^*$
gibt es ein $i \in \mathbb{Z}_{|w|}$, sodass $w(i) = S$ ist.

Zeigen Sie, dass für jedes Wort $w \in V^*$ mit $S \Rightarrow^* w$ gilt:
Es gibt $i \in \mathbb{Z}_{|w|}$, sodass $w(i) = S$ ist.

Beweisen Sie dazu mittels vollständiger Induktion über n:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \colon \forall w \in V^* \colon\ \text{wenn } S \Rightarrow^n w, \text{ dann kommt in } w \text{ Symbol } S \text{ vor}$$

Markieren Sie in Ihrem Beweis deutlich die Stelle, an der Sie die Bedingung $\circledast$ benutzen.

/ 1

c) Warum folgt aus Teilaufgabe b), dass für jedes G, das $\circledast$ erfüllt, die Sprache $L(G)$ leer ist?

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 5:

/ 7

Aufgabe 6 (1 + 1 + 1 + 2 + 2 = 7 Punkte)

Es sei $A = \{a, b\}$. Eine binäre Relation $\sqsubseteq$ auf A^* sei definiert durch die Festlegung:

$$\forall w_1, w_2 \in A^* : w_1 \sqsubseteq w_2 \text{ genau dann, wenn } \exists v_1 \in A^* : w_1 v_1 = w_2$$

Wenn $w_1 \sqsubseteq w_2$ ist, heißt w_1 ein Präfix von w_2.

/ 1

a) Zeigen Sie, dass die Relation $\sqsubseteq$ reflexiv und transitiv ist.

Für $L \subseteq A^*$ sei $p(L) = \{w' \in A^* \mid \exists w \in L : w' \sqsubseteq w\}$ die Sprache aller Präfixe der Wörter aus L.

/ 1

b) Geben Sie ein $L \subseteq A^*$ an, für das $A^* \setminus L$ unendlich und $p(L) = A^*$ ist.

Tipp. Man kann sich darauf beschränken, eine Sprache zu suchen, die für jede Wortlänge entweder alle Wörter enthält oder gar keines.

/ 1

c) Geben Sie ein $L \subseteq A^*$ an, für das sowohl $p(L)$ als auch $A^* \setminus p(L)$ unendlich ist.

/ 2

d) Die Sprache L sei regulär. Das heißt, es existiert ein endlicher Automat B mit Zustandsmenge Z_B, Anfangszustand $z_{B0} \in Z_B$, Zustandsüberführungsfunktion $f_B \colon Z_B \times A \to Z_B$ und Menge akzeptierender Zustände $F_B \subseteq Z_B$, sodass $L(B) = L$ ist.

Geben Sie explizit einen endlichen Automaten C an, sodass $L(C) = p(L)$ ist.

/ 2

e) Die formalen Sprachen $L_1, L_2 \subseteq A^*$ seien beide nicht leer. Zeigen Sie:

(i) $p(L_1) \subseteq p(L_1 \cdot L_2)$

(ii) $L_1 \cdot p(L_2) \subseteq p(L_1 \cdot L_2)$

Kennzeichnen Sie die Stelle(n) in Ihren Beweisen, an denen Sie die Voraussetzung $L_2 \neq \emptyset$ benötigen.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 6:

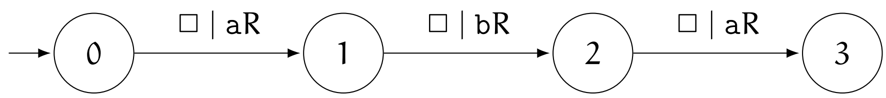
/ 7

Aufgabe 7 (2 + 1 + 2 + 2 = 7 Punkte)

Es sei $A = \{a, b\}$ und $w \in A^+$ ein Wort. Eine Turingmaschine T heißt ein *Drucker* für w, falls T bei Eingabewort ε in einer Konfiguration c *hält*, in der das Wort w auf dem Band umgeben nur von Leersymbolen steht. Genauer: Es soll $i \in \mathbb{Z}$ existieren, sodass für die Bandbeschriftung b von c gilt:

$$\forall j \in \mathbb{Z}: \; b(i+j) = \begin{cases} w(j), & j \in \mathbb{Z}_{|w|} \\ \square, & \text{sonst} \end{cases}$$

Zum Beispiel ist folgende Turingmaschine T_{aba} ein Drucker für das Wort aba:



/ 2

a) Simulieren Sie T_{aba} bei Eingabe ε. Geben Sie die Anfangskonfiguration sowie die Konfiguration nach jedem Schritt von T_{aba} bildlich an. Aus jeder Konfiguration sollen dabei die Bandbeschriftung, der aktuelle Zustand von T_{aba} und die Position des Schreib-Lese-Kopfes hervorgehen.

Begründen Sie anschließend kurz, warum T_{aba} in der letzten dargestellten Konfiguration anhält.

Es sei jetzt $w \in A^+$ beliebig und T_w ein Drucker für w, dessen Zustandsmenge gleich $\mathbb{Z}_n$ für ein $n \in \mathbb{N}_+$ ist, also genau n Zustände besitzt. Der Startzustand von T_w sei stets 0.

/ 1

b) Zeigen Sie: Für jedes $w \in A^+$ gibt es einen Drucker T_w mit $n \leq |w| + 1$.

Hinweis. Seien Sie in dieser und den folgenden Teilaufgaben hinreichend präzise. Lösungen „mit Pünktchen" werden nicht akzeptiert.

/ 2

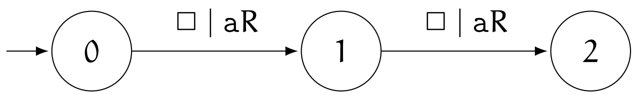
c) Zeigen Sie: Für jedes solche w gibt es einen Drucker T_w mit $n \leq |w|$.

Tipp. Wie könnte man bei T_{aba} den Zustand 3 einsparen?

/ 2

d) Zeigen Sie, dass es für ein Wort w der Länge $|w| = 4$ einen Drucker T_w mit $n = 3$ gibt.

Tipp 1. Ergänzen Sie die folgende Turingmaschine so, dass die Zustände 0 und 1 mindestens zweimal besucht werden.



Tipp 2. Der Schreib-Lese-Kopf darf sich nicht nur nach rechts, sondern auch nach links bewegen.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 7: