Grundbegriffe der Informatik — Aufgabenblatt 8
Lösungsvorschläge

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium Nr.:	
Tutor*in:	

Ausgabe: 23. Dezember 2020

Abgabe: 19. Januar 2021, 12:00 Uhr
durch Hochladen in den Ilias-Kurs

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie
- handschriftlich erstellt sind und
- rechtzeitig
- mit dieser Seite als Deckblatt
- gescannt oder fotografiert mit allen Seiten in *einer* Pdf-Datei

ins Ilias-System hochgeladen werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 8:	/ 19
Blätter 7 – 8:	/ 41

Aufgabe 8.1 (1 + 1 + 1 = 3 Punkte)
Es sei F die Menge der Fahrräder, M die der Motorräder, und $D = F \cup M$. Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in Prädikatenlogik:

a) „Jedes Fahrrad hat mindestens 2 Räder."
b) „Jedes Element aus D ist entweder ein Fahrrad oder ein Motorrad."
c) „Wenn etwas kein Motorrad ist aber mindestens 2 Räder hat, dann ist es ein Fahrrad."

Versehen Sie alle Relationssymbole, die in Ihren Formalisierungen vorkommen, mit einer passenden Interpretation, sodass der Bezug zu F, M, und D offensichtlich ist.

Lösung 8.1
R bezeichne die Menge der Räder. Wir verwenden folgende Relationssymbole:

- $\mathtt{F}$ und $\mathtt{M}$ sind einstellige Relationssymbole, wobei $I(\mathtt{F}) = F$ und $I(\mathtt{M}) = M$ ist.
- $\mathtt{R}$ ist ein zweistelliges Relationssymbol, wobei $I(\mathtt{R}) \subseteq D \times R$ die Relation ist, für die gilt: $(d, r) \in I(\mathtt{R})$ gdw. d hat r als Rad.

Die Domäne ist $D \cup R$.

a) $\forall \mathtt{x}\,(\mathtt{F(x)} \rightarrow \exists \mathtt{y}\, \exists \mathtt{z}\,(\mathtt{R(x,y)} \wedge \mathtt{R(x,z)} \wedge \neg(\mathtt{y} \doteq \mathtt{z})))$
b) $\forall \mathtt{x}\,((\mathtt{F(x)} \vee \mathtt{M(x)}) \wedge (\mathtt{F(x)} \rightarrow \neg \mathtt{M(x)}) \wedge (\mathtt{M(x)} \rightarrow \neg \mathtt{F(x)}))$
oder $\forall \mathtt{x}\,((\mathtt{F(x)} \vee \mathtt{M(x)}) \wedge \neg(\mathtt{F(x)} \wedge \mathtt{M(x)}))$
c) $\forall \mathtt{x}\,((\neg \mathtt{M(x)} \wedge \exists \mathtt{y}\, \exists \mathtt{z}\,(\mathtt{R(x,y)} \wedge \mathtt{R(x,z)} \wedge \neg(\mathtt{y} \doteq \mathtt{z}))) \rightarrow \mathtt{F(x)})$

Aufgabe 8.2 (1 + 1 + 1 = 3 Punkte)
Es sei M eine nichtleere Menge und $R, S \subseteq M \times M$ Relationen auf M.

a) Zeigen Sie: Wenn R und S beides linkstotal sind, dann ist auch $S \circ R$ linkstotal.
b) Zeigen Sie: Wenn $S \circ R$ linkstotal ist, dann muss R linkstotal sein.
c) Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn $S \circ R$ linkstotal ist, dann muss S linkstotal sein.

Lösung 8.2

a) Es sei $x \in M$. Weil R linkstotal ist, gibt es $y \in M$, sodass $(x, y) \in R$ ist. Analog: Weil S linkstotal ist, gibt es $z \in M$ mit $(y, z) \in S$. Damit ist $(x, z) \in S \circ R$. Da x beliebig war, ist also $S \circ R$ linkstotal.
b) Es sei $x \in M$. Weil $S \circ R$ linkstotal ist, gibt es $z \in M$ mit $(x, z) \in S \circ R$. Nach Definition von $S \circ R$ gibt es also $y \in M$ mit $(x, y) \in R$. Da x beliebig war, ist also R linkstotal.
c) Die Behauptung ist **falsch**. Man betrachte z. B. $M = \{1, 2\}$, $R = \{(1, 1), (2, 1)\}$ und $S = \{(1, 1)\}$. Dann ist $S \circ R = \{(1, 1), (2, 1)\}$, also ist $S \circ R$ linkstotal, obwohl S es nicht ist.

Aufgabe 8.3 (1 + 1 + 1 = 3 Punkte)
Es sei folgende prädikatenlogische Formel gegeben:

$$F = \forall \mathtt{x}\, \forall \mathtt{y}\,(\mathtt{S(x)} \rightarrow (\mathtt{S(y)} \vee \mathtt{R(x,y)}))\,.$$

a) Geben Sie ein Modell (D, I) von F an, das weder Modell von $G = \forall \mathtt{x}\, \mathtt{S(x)}$ noch von $G' = \forall \mathtt{x}\, \neg \mathtt{S(x)}$ ist.
b) Ist F zur Formel $H = \forall \mathtt{x}\, \forall \mathtt{y}\,(\mathtt{S(y)} \rightarrow (\mathtt{S(x)} \vee \mathtt{R(x,y)}))$ logisch äquivalent? Begründen Sie Ihre Antwort.
c) Ist F allgemeingültig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung 8.3

a) Z. B. $D = \mathbb{N}_0$ (oder sogar $D = \{0,1\}$), $I(\mathtt{R}) = \leq$ und $I(\mathtt{S}) = \{0\}$.

b) Nein. Z. B. ist das eben angegebene (D, I) kein Modell von H, obwohl es Modell von F ist. Damit können F und H nicht logisch äquivalent sein.

c) Nein. Z. B. für $D = \mathbb{N}_0$, $I(\mathtt{R}) = \varnothing$ und $I(\mathtt{S}) = \{0\}$ ist (D, I) kein Modell von F.

Aufgabe 8.4 **(2 + 1 + 1 + 6 = 10 Punkte)**

Es seien $\mathtt{S}$ und $\mathtt{T}$ einstellige Relationssymbole, und für $i \in \{1,2,3\}$ sei $\mathtt{R}_i$ ein zweistelliges Relationssymbol sowie F_i die prädikatenlogische Formel

$$F_i : \quad \forall\mathtt{x}\,\forall\mathtt{y}\,((\mathtt{S(x)} \wedge \mathtt{T(y)}) \rightarrow \mathtt{R}_i\mathtt{(x,y)})\,.$$

Es sei $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. Für jedes $w \in A^+$ und jedes i wird eine Interpretation (D_w, I_w) durch $D_w = \mathbb{Z}_{|w|}$, $I_w(\mathtt{S}) = \{y \in D_w \mid w(y) = \mathtt{a}\}$, $I_w(\mathtt{T}) = \{y \in D_w \mid w(y) = \mathtt{b}\}$, und $I_w(\mathtt{R}_i)$ wie folgt festgelegt:

(i) $I_w(\mathtt{R}_1) = \{(x,y) \in D_w \times D_w \mid x \leq y\}$

(ii) $I_w(\mathtt{R}_2) = \{(x,y) \in D_w \times D_w \mid x \neq y\}$

(iii) $I_w(\mathtt{R}_3) = \{(x,y) \in D_w \times D_w \mid x + y \text{ gerade}\}$.

Da die Formeln F_i keine freien Variablen enthalten, kann eine Variablenbelegung β beliebig gewählt werden. Wir sagen, ein Wort $w \in A^+$ ist *Modell* von F_i, wenn gilt: $val_{D_w,I_w,\beta}(F_i) = \mathbf{w}$.

a) Geben Sie für $w = \mathtt{abb}$ explizit $I_w(\mathtt{S})$, $I_w(\mathtt{T})$, $I_w(\mathtt{R}_1)$, $I_w(\mathtt{R}_2)$ und $I_w(\mathtt{R}_3)$ an.

b) Geben Sie an, für welche $i \in \{1,2,3\}$ das Wort $w = \mathtt{abb}$ Modell der Formel F_i ist.

c) Wenn für ein i das Wort w nicht Modell von F_i ist, geben Sie eine Variablenbelegung β an, die zur Interpretation (D_w, I_w) passt und für die gilt:

$$val_{D_w,I_w,\beta}((\mathtt{S(x)} \wedge \mathtt{T(y)}) \rightarrow \mathtt{R}_i\mathtt{(x,y)}) = \mathbf{f}.$$

d) Geben Sie für jedes i jeweils die Sprache $L_i \subseteq A^+$ explizit an, die genau jedes Wort $w \in A^+$ enthält, die Modell von F_i ist. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

Lösung 8.4

a)
- $I_w(\mathtt{S}) = \{0\}$
- $I_w(\mathtt{T}) = \{1,2\}$
- $I_w(\mathtt{R}_1) = \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,1),(1,2),(2,2)\}$
- $I_w(\mathtt{R}_2) = \{(0,1),(0,2),(1,0),(1,2),(2,0),(2,1)\}$
- $I_w(\mathtt{R}_3) = \{(0,0),(0,2),(1,1),(2,0),(2,2)\}$

b) $i \in \{1,2\}$

c) $\beta(\mathtt{x}) = 0$ und $\beta(\mathtt{y}) = 1$

d)
- $L_1 = \{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}^* \setminus \{\varepsilon\}$

  Begründung: Ein Wort $w \in A^+$ ist genau dann Modell von F_1, wenn vor jedem $\mathtt{a}$ in w kein $\mathtt{b}$ steht.

- $L_2 = A^+$

  Begründung: Gilt für eine Variablenbelegung $\beta(\mathtt{x}) = \beta(\mathtt{y})$, so haben wir $val_{D_w,I_w,\beta}(\mathtt{S(x)} \wedge \mathtt{T(y)}) = \mathbf{f}$. Gilt wiederum $\beta(\mathtt{x}) \neq \beta(\mathtt{y})$, so haben wir $val_{D_w,I_w,\beta}(\mathtt{R}_2\mathtt{(x,y)}) = \mathbf{w}$. In beiden Fällen ist also $val_{D_w,I_w,\beta}(F_2) = \mathbf{w}$, das heißt, jedes $w \in A^+$ ist Modell von F_2.

- $L_3 = (\{\mathtt{a}\}^* \cup \{\mathtt{b}\}^*) \setminus \{\varepsilon\}$

  Begründung: Jedes $w \in L_3$ ist Modell von F_3, da für jedes β entweder $val_{D_w,I_w,\beta}(\mathtt{S(x)}) = \mathbf{f}$ oder $val_{D_w,I_w,\beta}(\mathtt{T(y)}) = \mathbf{f}$ ist.

  Sei andererseits $w \in A^+$ Modell von F_3 und $|w| \geq 2$, und sei zudem $i \in \mathbb{Z}_{|w|}$ mit $i < |w| - 1$. Für $\beta(\mathtt{x}) = i$ und $\beta(\mathtt{y}) = i+1$ ist $val_{D_w,I_w,\beta}(\mathtt{R_3(x,y)}) = \mathbf{f}$, also muss $val_{D_w,I_w,\beta}(\mathtt{S(x)} \wedge \mathtt{T(y)}) = \mathbf{f}$ sein, sprich entweder $w(i) = \mathtt{a}$ oder $w(i+1) = \mathtt{b}$. Für $\beta(\mathtt{y}) = i$ und $\beta(\mathtt{x}) = i+1$ gilt ebenfalls $val_{D_w,I_w,\beta}(\mathtt{S(x)} \wedge \mathtt{T(y)}) = \mathbf{f}$, also entweder $w(i) = \mathtt{b}$ oder $w(i+1) = \mathtt{a}$. Wir stellen fest, dass $w(i) = w(i+1)$ gelten muss. Weil i beliebig war, somit ist entweder $w \in \{\mathtt{a}\}^*$ oder $w \in \{\mathtt{b}\}^*$ (wobei $w \neq \varepsilon$ laut Aufgabenstellung vorausgesetzt wird).