Grundbegriffe der Informatik
Aufgabenblatt 9

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium:	Nr.
	Name des Tutors:

Ausgabe: 23. Dezember 2015

Abgabe: 15. Januar 2015, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 9:	/ 17	(Physik: 17)
Blätter 1 – 9:	/ 159	(Physik: 136)

Aufgabe 9.1 (2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 2 = 11 Punkte)
Für jede positive ganze Zahl $n \in \mathbb{N}_+$ sei $G_n = (V_n, E_n)$ der gerichtete Graph mit der Knotenmenge $V_n = \{0,1\}^n$ und der Kantenmenge

$$E_n = \{(x,y) \in V_n^2 \mid \exists i \in \mathbb{Z}_n \colon (x_i \neq y_i \wedge \forall k \in \mathbb{Z}_n \smallsetminus \{i\} \colon x_k = y_k)\}.$$

a) Zeichnen Sie G_1, G_2 und G_3 jeweils in ein kartesisches Koordinatensystem der entsprechenden Dimension.
b) Geben Sie einen geschlossenen arithmetischen Ausdruck für $|E_n|$ an. Dabei bedeutet *geschlossen*, dass in dem Ausdruck weder das Summenzeichen $\sum$ noch das Produktzeichen $\prod$ vorkommt.
c) Geben Sie für jede positive ganze Zahl $n \in \mathbb{N}_+$ eine Einbettung f_n von G_n in G_{n+1} an, das heißt, eine injektive Abbildung $f_n \colon V_n \to V_{n+1}$ derart, dass

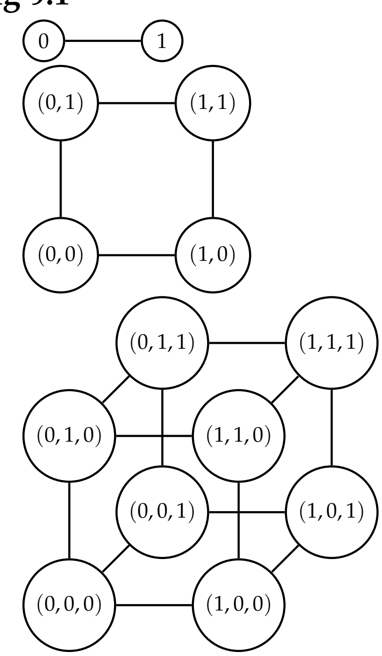
$$\forall x \in V_n\ \forall y \in V_n \colon\ ((x,y) \in E_n \to (f_n(x), f_n(y)) \in E_{n+1})\,.$$

d) Geben Sie einen Pfad $p = (v_0, v_1, v_2, v_3)$ von $(0,0,0)$ nach $(1,1,1)$ in G_3 an. Geben Sie außerdem einen Pfad q von $(0,0,0,0)$ nach $(1,1,1,1)$ in G_4 an, der den Pfad $(f_3(v_0), f_3(v_1), f_3(v_2), f_3(v_3))$ als Teilpfad enthält, wobei f_3 die Einbettung von G_3 in G_4 aus der vorangegangenen Teilaufgabe sei.
e) Geben Sie für jede positive ganze Zahl $n \in \mathbb{N}_+$ einen geschlossenen arithmetischen Ausdruck für

$$\gamma_n = \min\{|p| \mid p \text{ ist Pfad in } G_n \text{ von } (0,0,\ldots,0) \text{ nach } (1,1,\ldots,1)\}$$

an.
f) Geben Sie für jede positive ganze Zahl $n \in \mathbb{N}_+$ einen Graph-Isomorphismus φ_n von G_n nach G_n an, der nicht die identische Abbildung ist.

Lösung 9.1

a)


b) $|E_n| = 2^{n-1} \cdot n$
Es sei $n \in \mathbb{N}_+$. Der Graph G_n hat genau 2^n Knoten. Jeder dieser Knoten hat Grad n, das heißt, genau n inzidente Kanten. Die Kantenzahl beträgt somit

$$\frac{\sum_{x \in V_n} n}{2} = \frac{2^n \cdot n}{2} = 2^{n-1} \cdot n.$$

Wir müssen $\sum_{x \in V_n} n$ durch 2 dividieren, da wir im Ausdruck $\sum_{x \in V_n} n$ jede Kante doppelt zählen, einmal je inzidenten Knoten (und jede Kante, die keine Schlinge ist, ist zu genau zwei verschiedenen Knoten inzident).

c) Für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ ist

$$\begin{aligned} f_n \colon V_n &\to V_{n+1}, \\ x &\mapsto (x, 0), \end{aligned}$$

eine Einbettung von G_n in G_{n+1}.

d) Ein möglicher Pfad p ist $((0,0,0),(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$. Ein möglicher Pfad q ist $((0,0,0,0),(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1))$.

e) $\gamma_n = n$
Um von $(0,0,\ldots,0)$ nach $(1,1,\ldots,1)$ in G_n zu kommen müssen genau n bits von 0 auf 1 kippen.

f) Für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ ist

$$\begin{aligned} \varphi_n \colon V_n &\to V_n, \\ (x,0) &\mapsto (x,1), \\ (x,1) &\mapsto (x,0), \end{aligned}$$

ein Isomorphismus von G_n nach G_n. Für $n = 1$ degeneriert $(x, 0)$ zu 0 und $(x, 1)$ zu 1.

g) $\xi_n = n$
Tatsächlich genügt es n Kanten aus G_n zu entfernen, damit der entstehende Graph unzusammenhängend wird: Man wähle einfach einen Knoten und entferne alle zu diesem Knoten inzidenten Kanten.
Das man mit einer kleineren Anzahl an Kanten nicht auskommt, ist schwerer einzusehen.

h) Die Kantenmenge

$$F_n = \{\{x, y\} \in E_n \mid \sigma_n(x) < \sigma_n(y) \land \tau_n(x) \leq \tau_n(y)\}$$

leistest das Gewünschte.

Aufgabe 9.2 (1 + 1 + 2 + 2 = 6 Punkte)

Hinweis: Benutzen Sie in dieser Aufgabe die Definition von „Zyklus" aus dem aktualisierten Skript: Ein Zyklus ist ein geschlossener Pfad, dessen Länge größer als oder gleich 1 ist.

Ein sogenannter DAG (engl. *directed acyclic graph*) ist ein gerichteter Graph, der keine Zyklen enthält.

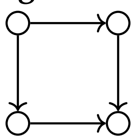
a) Geben Sie einen DAG mit 4 Knoten an, der
   - kein Baum ist, und
   - einen Teilgraphen mit 4 Knoten enthält, der ein Baum ist.

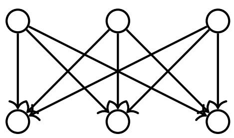
b) Geben Sie einen DAG mit 6 Knoten und 9 Kanten an, der keinen Pfad der Länge 2 enthält.

c) Begründen Sie, warum jeder Baum ein DAG ist.

d) Es sei $G = (V, E)$ ein DAG und es seien $x, y \in V$ zwei Knoten von G mit der Eigenschaft: $(x, y) \in E^*$ und $(y, x) \in E^*$. Beweisen Sie: $x = y$.

Lösung 9.2

a) 

b) 

c) Es ist zu zeigen, dass ein Baum keine Zyklen enthält.
Angenommen ein Graph $G = (V, E)$ ist ein Baum mit Wurzel $r \in V$ und er enthält einen Zyklus $p = (v_0, \ldots, v_n)$, also $n \geq 1$ und $v_0 = v_n$.
Da G ein Baum ist, gibt es einen Pfad von q von r zu v_0. Wenn man diesen Pfad um die Folge $v_1, \ldots, v_n$ verlängert, erhält man wiederum einen Pfad von r zu v_0, der aber länger als also verschieden von q ist.
Also gibt es mindestens zwei Pfade von r nach v_0 im Widerspruch zur Annahme, dass G ein Baum ist.

d) Wäre $x \neq y$, dann gäbe es wegen $(x, y) \in E^*$ einen Pfad $(v_0, \ldots, v_n)$ mit $x = v_0, y = v_n$ und $n \geq 1$, wegen $(y, x) \in E^*$ gäbe es einen Pfad $(v'_0, \ldots, v'_m)$ mit $y = v'_0$, $x = v'_m$ und $m \geq 1$.
Dann wäre aber $(v_0, \ldots, v_n, v'_1, \ldots, v'_m)$ ein Pfad von x nach x einer Länge ≥ 1 im Widerspruch zu der Tatsache, dass G ein DAG ist.