# Grundbegriffe der Informatik
# Aufgabenblatt 7

| | |
|---|---|
| Matr.nr.: | |
| Nachname: | |
| Vorname: | |
| Tutorium: | Nr. |
| | Name des Tutors: |
| Ausgabe: | 9. Dezember 2015 |
| Abgabe: | 18. Dezember 2015, 12:30 Uhr<br>im GBI-Briefkasten im Untergeschoss<br>von Gebäude 50.34 |

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

---

*Vom Tutor auszufüllen:*

erreichte Punkte

| | | |
|---|---|---|
| Blatt 7: | / 20 | (Physik: 0) |
| Blätter 1 – 7: | / 124 | (Physik: 101) |

---

Mit **[nicht Physik]** gekennzeichnete Aufgaben müssen von Studenten der Physik nicht bearbeitet werden.

**Aufgabe 7.1 (1 + 1 + 2 + 2 = 6 Punkte) [nicht Physik]**
Es seien $Const_{PL} = \{\}$, $Var_{PL} = \{\mathtt{x}, \mathtt{y}, \mathtt{z}\}$, $Fun_{PL} = \{\}$ und $Rel_{PL} = \{\mathtt{E}, \doteq\}$ mit $\mathrm{ar}(\mathtt{E}) = 2$, und es sei $F$ die prädikatenlogische Formel

$$\neg\exists \mathtt{x}(\mathtt{E(x,y)} \vee \neg\forall \mathtt{z}\forall \mathtt{x}\forall \mathtt{y}(\mathtt{E(x,z)} \wedge \mathtt{E(y,z)} \rightarrow \mathtt{x} \doteq \mathtt{y}))$$

a) Geben Sie all jene Variablen an die frei und all jene die gebunden in $F$ vorkommen.
b) Geben sie eine Substitution $\sigma$ an, die *nicht* kollisionsfrei für $F$ ist.
c) Geben Sie eine Interpretation $(D_1, I_1)$ und eine Variablenbelegung $\beta_1$ so an, dass $val_{D_1,I_1,\beta_1}(F) = \mathbf{w}$ gilt.
d) Geben Sie eine Interpretation $(D_2, I_2)$ und eine Variablenbelegung $\beta_2$ so an, dass $val_{D_2,I_2,\beta_2}(F) = \mathbf{f}$ gilt.

**Lösung 7.1**
a) Nur die Variable $\mathtt{y}$ kommt frei in $F$ vor. Genau die Variablen $\mathtt{x}$, $\mathtt{y}$ und $\mathtt{z}$ kommen gebunden in $F$ vor.
b) Die Substitution $\sigma_{\{(\mathtt{y}/\mathtt{x})\}}$ leistet das Gewünschte.
c) Die Interpretation $(D_1, I_1) = (\{0,1\}, <)$ und die Variablenbelegung $\beta_1 \colon Var_{PL} \to D, v \mapsto 0$, leisten das Gewünschte.
d) Die Interpretation $(D_2, I_2) = (\{0,1\}, <)$ und die Variablenbelegung $\beta_2 \colon Var_{PL} \to D, v \mapsto 1$, leisten das Gewünschte.

**Aufgabe 7.2 (2 + 2 + 2 = 6 Punkte) [nicht Physik]**
Formulieren Sie die folgenden Aussagen als Formeln in Prädikatenlogik:
a) Nicht alle Vögel können fliegen.
b) Wenn es irgendjemand kann, dann kann es Donald Ervin Knuth.
c) John liebt jeden, der sich nicht selbst liebt.

*Anmerkung:* Die Alphabete der Konstantensymbole, Variablensymbole, Funktionssymbole und Relationssymbole müssen Sie nicht explizit angeben, da diese implizit aus den Formeln hervorgehen.

**Lösung 7.2**
a)
$$\exists \mathtt{x}(\mathtt{Vogel(x)} \wedge \neg\mathtt{flugfaehig(x)})$$
b)
$$\exists \mathtt{x}(\mathtt{kann\_es(x)}) \rightarrow \mathtt{kann\_es(knuth)}$$
c)
$$\forall \mathtt{x}(\neg\mathtt{liebt(x,x)} \rightarrow \mathtt{liebt(John,x)})$$

**Aufgabe 7.3 (4 Punkte) [nicht Physik]**

Es seien $G$ und $H$ zwei prädikatenlogische Formeln. Beweisen Sie, dass die prädikatenlogische Formel

$$(\exists \mathtt{x}(G \to H)) \to (\forall \mathtt{x} G \to \exists \mathtt{x} H)$$

allgemeingültig ist.

**Lösung 7.3**
*Nebenbei:* Tatsächlich ist sogar die prädikatenlogische Formel

$$(\exists \mathtt{x}(G \to H)) \leftrightarrow (\forall \mathtt{x} G \to \exists \mathtt{x} H)$$

allgemeingültig (siehe Übung).

*Beweis:* Es sei $(D, I)$ eine passende Interpretation und es sei $\beta$ eine passende Variablenbelegung. Weiter sei $U = (\exists \mathtt{x}(G \to H))$ und es sei $V = (\forall \mathtt{x} G \to \forall \mathtt{x} H)$. Gemäß der Definition von $val_{D,I,\beta}$ für Implikationen gilt $val_{D,I,\beta}(U \to V) = b_\vee(b_\neg(val_{D,I,\beta}(U)), val_{D,I,\beta}(V))$.

**Fall 1:** $val_{D,I,\beta}(U) = \mathbf{f}$. Gemäß der Definitionen von $b_\neg$ und $b_\vee$ gilt dann $val_{D,I,\beta}(U \to V) = \mathbf{w}$.

**Fall 2:** $val_{D,I,\beta}(U) = \mathbf{w}$. Gemäß der Charakterisierung von $val_{D,I,\beta}$ für existenzquantifizierte Formeln gibt es somit ein $d \in D$ so, dass $val_{D,I,\beta^d_{\mathtt{x}}}(G \to H) = \mathbf{w}$. Gemäß der Definition von $val_{D,I,\beta^d_{\mathtt{x}}}$ für Implikationen gilt damit $b_\vee(b_\neg(val_{D,I,\beta^d_{\mathtt{x}}}(G)), val_{D,I,\beta^d_{\mathtt{x}}}(H)) = \mathbf{w}$.

**Fall 2.1:** $val_{D,I,\beta^d_{\mathtt{x}}}(G) = \mathbf{w}$. Dann gilt $val_{D,I,\beta^d_{\mathtt{x}}}(H) = \mathbf{w}$. Gemäß der Charakterisierung von $val_{D,I,\beta}$ für existenquantifizierte Formeln aus der Vorlesung gilt somit $val_{D,I,\beta}(\exists \mathtt{x} H) = \mathbf{w}$. Gemäß der Definition von $val_{D,I,\beta}$ für Implikationen gilt also $val_{D,I,\beta}(\forall \mathtt{x} G \to \exists \mathtt{x} H) = \mathbf{w}$.

**Fall 2.2:** $val_{D,I,\beta^d_{\mathtt{x}}}(G) = \mathbf{f}$. Gemäß der Definition von $val_{D,I,\beta}$ für allquantifizierte Formeln gilt somit $val_{D,I,\beta}(\forall \mathtt{x} G) = \mathbf{f}$. Gemäß der Definition von $val_{D,I,\beta}$ für Implikationen gilt also $val_{D,I,\beta}(\forall \mathtt{x} G \to \exists \mathtt{x} H) = \mathbf{w}$.

In beiden Fällen gilt $val_{D,I,\beta}(V) = \mathbf{w}$. Gemäß der Definitionen von $b_\neg$ und $b_\vee$ gilt folglich $val_{D,I,\beta}(U \to V) = \mathbf{w}$.

In beiden Fällen gilt $val_{D,I,\beta}(U \to V) = \mathbf{w}$.

**Aufgabe 7.4 (4 Punkte) [nicht Physik]**
Es seien $Const_{PL} = \{\}$, $Var_{PL} = \{\mathtt{x}, \mathtt{y}\}$, $Fun_{PL} = \{\}$ und $Rel_{PL} = \{\mathtt{B}, \mathtt{R}, \doteq\}$ mit $\mathrm{ar}(\mathtt{B}) = 1$ und $\mathrm{ar}(\mathtt{R}) = 2$. Weiter sei $F$ die prädikatenlogische Formel

$$\exists \mathtt{x}(\mathtt{B}(\mathtt{x})) \land \forall \mathtt{x}(\mathtt{B}(\mathtt{x}) \leftrightarrow \forall \mathtt{y}(\neg \mathtt{R}(\mathtt{y},\mathtt{y}) \leftrightarrow \mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{y})))$$

Beweisen Sie, dass $F$ unerfüllbar ist, das heißt, dass für jede passende Interpretation $(D, I)$ und jede passende Variablenbelegung $\beta$ gilt: $val_{D,I,\beta}(F) = \mathbf{f}$.

*Hinweis:* Für alle prädikatenlogischen Formeln $G$ und $H$, jede passende Interpretation $(D, I)$ und jede passende Variablenbelegung $\beta$ gilt:

$$val_{D,I,\beta}(G \leftrightarrow H) = \mathbf{w} \text{ genau dann, wenn } val_{D,I,\beta}(G) = val_{D,I,\beta}(H).$$

**Lösung 7.4**

*Nebenbei:* Liest man das Relationssymbol $\mathtt{B}$ als „ist ein Barbier" und das Relationssymbol $\mathtt{R}$ als „rasiert" so lautet $F$ umgangssprachlich: Es gibt einen Barbier und Barbier ist genau der, der all jene rasiert, die sich nicht selbst rasieren. Die Unerfüllbarkeit von $F$ bedeutet also, dass es keinen Barbier geben kann, der all jene rasiert, die sich nicht selbst rasieren.

*Beweis:* Es sei $(D, I)$ eine passende Interpretation und es sei $\beta$ eine passende Variablenbelegung. Weiter sei $F_1 = \exists\mathtt{x}(\mathtt{B}(\mathtt{x}))$ und es sei $F_2 = \forall\mathtt{x}(\mathtt{B}(\mathtt{x}) \leftrightarrow \forall\mathtt{y}(\neg\mathtt{R}(\mathtt{y},\mathtt{y}) \leftrightarrow \mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{y})))$. Dann gilt $F = F_1 \wedge F_2$. Ferner gilt

$$val_{D,I,\beta}(F_1 \wedge F_2) = b_\wedge(val_{D,I,\beta}(F_1), val_{D,I,\beta}(F_2)).$$

**Fall 1:** $val_{D,I,\beta}(F_1) = \mathbf{f}$. Gemäß der Definition von $b_\wedge$ gilt damit $val_{D,I,\beta}(F_1 \wedge F_2) = \mathbf{f}$.

**Fall 2:** $val_{D,I,\beta}(F_1) = \mathbf{w}$. Gemäß der Charakterisierung von $val_{D,I,\beta}$ existenquantifizierte Formeln aus der Vorlesung gibt es somit ein $b \in D$ so, dass $val_{D,I,\beta^b_\mathtt{x}}(\mathtt{B}(\mathtt{x})) = \mathbf{w}$. Gemäß der Definition von $val_{D,I,(\beta^b_\mathtt{x})^b_\mathtt{y}}$ für negierte Formeln und atomare Formeln gilt damit

$$\begin{aligned} val_{D,I,(\beta^b_\mathtt{x})^b_\mathtt{y}}(\neg\mathtt{R}(\mathtt{y},\mathtt{y})) &= b_\neg(val_{D,I,(\beta^b_\mathtt{x})^b_\mathtt{y}}(\mathtt{R}(\mathtt{y},\mathtt{y}))) \\ &= \begin{cases} b_\neg(\mathbf{w}), & \text{falls } ((\beta^b_\mathtt{x})^b_\mathtt{y}(\mathtt{y}), (\beta^b_\mathtt{x})^b_\mathtt{y}(\mathtt{y})) \in I(\mathtt{R}), \\ b_\neg(\mathbf{f}), & \text{sonst,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \mathbf{f}, & \text{falls } (b, b) \in I(\mathtt{R}), \\ \mathbf{w}, & \text{sonst,} \end{cases} \end{aligned}$$

und analog gilt

$$val_{D,I,(\beta^b_\mathtt{x})^b_\mathtt{y}}(\mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{y})) = \begin{cases} \mathbf{w}, & \text{falls } (b, b) \in I(\mathtt{R}), \\ \mathbf{f}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Gemäß der Hinweises gilt somit $val_{D,I,(\beta^b_\mathtt{x})^b_\mathtt{y}}(\neg\mathtt{R}(\mathtt{y},\mathtt{y}) \leftrightarrow \mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{y})) = \mathbf{f}$. Gemäß der Definition von $val_{D,I,\beta}$ für allquantifizierte Formeln gilt also $val_{D,I,\beta^b_\mathtt{x}}(\forall\mathtt{y}(\neg\mathtt{R}(\mathtt{y},\mathtt{y}) \leftrightarrow \mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{y}))) = \mathbf{f}$. Wegen $val_{D,I,\beta^b_\mathtt{x}}(\mathtt{B}(\mathtt{x})) = \mathbf{w}$ und gemäß des Hinweises gilt folglich $val_{D,I,\beta^b_\mathtt{x}}(\mathtt{B}(\mathtt{x}) \leftrightarrow \forall\mathtt{y}(\neg\mathtt{R}(\mathtt{y},\mathtt{y}) \leftrightarrow \mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{y}))) = \mathbf{f}$. Gemäß der Definition von $val_{D,I,\beta}$ für allquantifizierte Formeln gilt damit $val_{D,I,\beta}(F_2) = \mathbf{f}$. Schließlich gilt $val_{D,I,\beta}(F_1 \wedge F_2) = \mathbf{f}$.

In beiden Fällen gilt $val_{D,I,\beta}(F) = \mathbf{f}$.