Grundbegriffe der Informatik
Aufgabenblatt 6

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium:	Nr. Name des Tutors:
Ausgabe:	2. Dezember 2015
Abgabe:	11. Dezember 2015, 12:30 Uhr im GBI-Briefkasten im Untergeschoss von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 6:	/ 20	(Physik: 20)
Blätter 1 – 6:	/ 104	(Physik: 101)

Aufgabe 6.1 (2 + 2 + (2 + 1 + 1 + 2) + 2 + 2 = 14 Punkte)
Es sei A ein Alphabet; es sei $\mathcal{L}$ die Menge aller formalen Sprachen über A, das heißt, $\mathcal{L} = \{L \mid L \subseteq A^*\}$; es sei $f\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ eine Abbildung derart, dass für jede formale Sprache $S \in \mathcal{L}$ und jede formale Sprache $T \in \mathcal{L}$ mit $S \subseteq T$ gilt: $f(S) \subseteq f(T)$; es seien die formalen Sprachen L_n, $n \in \mathbb{N}_0$, induktiv definiert durch

$$\begin{aligned} L_0 &= \{\}, \\ \text{für jedes } n \in \mathbb{N}_0\colon L_{n+1} &= f(L_n); \end{aligned}$$

und es sei L_∞ die formale Sprache $\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} L_n$.

a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $L_n \subseteq L_{n+1}$.
b) Beweisen Sie, dass $f(L_\infty) = L_\infty$ gilt. Eine formale Sprache mit dieser Eigenschaft nennt man *Fixpunkt von f*.
Hinweis: Für jede Menge I und alle formalen Sprachen $S_i \subseteq A^*$, $i \in I$, gilt $f(\bigcup_{i\in I} S_i) = \bigcup_{i\in I} f(S_i)$.
c) In dieser Teilaufgabe sei $A = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$ und es sei

$$\begin{aligned} f\colon \mathcal{L} &\to \mathcal{L}, \\ L &\mapsto \{\mathtt{0},\mathtt{1}\} \cup (\{\mathtt{0},\mathtt{1}\} \cdot L). \end{aligned}$$

(i) Geben Sie L_1, $L_2 \setminus L_1$ und $L_3 \setminus L_2$ so explizit wie möglich in der Form $\{\dots\}$ an.
(ii) Geben Sie einen arithmetischen Ausdruck E, in dem das Symbol n vorkommt und die Sprachen L_n, $n \in \mathbb{N}_0$, nicht vorkommen, so an, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $|L_{n+1} \setminus L_n| = E$.
(iii) Geben Sie L_∞ ohne Bezug auf die formalen Sprachen L_n, $n \in \mathbb{N}_0$, an.
(iv) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G so an, dass die von ihr erzeugte formale Sprache $L(G)$ gleich L_∞ ist.

d) In dieser Teilaufgabe sei $A = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{;}\}$ und es sei

$$\begin{aligned} f\colon \mathcal{L} &\to \mathcal{L}, \\ L &\mapsto \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^+ \cup (\{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^+ \cdot \{\mathtt{;}\} \cdot L). \end{aligned}$$

Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G so an, dass $L(G) = L_\infty$ gilt.
e) In dieser Teilaufgabe sei $A = \{\mathtt{(}, \mathtt{)}\}$ und es sei $G = (N, T, \mathtt{S}, P)$ die Grammatik mit den Nichtterminalsymbolen $N = \{\mathtt{S}\}$, den Terminalsymbolen $T = \{\mathtt{(}, \mathtt{)}\}$ und den Produktionen

$$P = \{\mathtt{S} \to \varepsilon \mid \mathtt{S(S)}\}.$$

Geben Sie eine Abbildung $f\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ so an, dass $L_\infty = L(G)$ gilt.

Aufgabe 6.2 (2 + 4 = 6 Punkte)
Es sei $G = (N, T, \mathtt{S}, P)$ die Grammatik mit den Nichtterminalsymbolen $N = \{\mathtt{S}, \mathtt{U}, \mathtt{X}, \mathtt{Q}\}$, den Terminalsymbolen $T = \{\mathtt{a}\}$ und den Produktionen

$$
\begin{aligned}
P = \{&\mathtt{S} \to \mathtt{aU} \mid \mathtt{aXa} \mid \mathtt{Qaa},\\
&\mathtt{U} \to \mathtt{aaU} \mid \varepsilon,\\
&\mathtt{X} \to \mathtt{Qaaa} \mid \mathtt{a},\\
&\mathtt{Q} \to \mathtt{aXa} \mid \mathtt{a}\}
\end{aligned}
$$

a) Leiten Sie aus dem Startsymbol das Wort $\mathtt{a}^7$ ab. Geben Sie dabei jeden Ableitungsschritt an.
b) Zeichnen Sie den Ableitungsbaum für das Wort $\mathtt{a}^{16}$.