

Grundbegriffe der Informatik

Aufgabenblatt 4

Matr.nr.:

--	--	--	--	--	--	--

Nachname:

--

Vorname:

--

Tutorium:

Nr.

--

Name des Tutors:

--

Ausgabe: 12. November 2014

Abgabe: 21. November 2014, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet
abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 4:

/ 17 + 3

Blätter 1 – 4:

/ 69 + 13

Aufgabe 4.1 (1 + 1 + 2 + 1 + 2 = 7 Punkte)

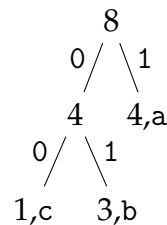
Es sei w das Wort aababcbba über dem Alphabet $\{a, b, c\}$.

- Bestimmen Sie die Huffman-Codierung des Wortes w anhand des in der Vorlesung vorgestellten Algorithmus.
- Bestimmen Sie die Block-Codierung des Wortes w für Blöcke der Länge 2.
- Welche Informationen benötigen Sie zur Decodierung eines block-codierten Wortes für Blöcke der Länge $n \in \mathbb{N}_+$?
- Weshalb wählt man bei der Block-Codierung von w als Blocklänge nicht $|w|$ und codiert w damit als Wort der Länge 1?
- Anstelle von nur zwei Buchstaben zur Codierung stehen Ihnen drei Buchstaben zur Verfügung, nämlich $\{0, 1, 2\}$. Überlegen Sie sich wie man das Verfahren aus der Vorlesung zur Bestimmung von Huffman-Codierungen auf diese drei Buchstaben verallgemeinern kann. Wenden Sie dieses Verfahren auf das Wort w an.

Lösung 4.1

- a) Schritt 1: Vorkommen zählen. $\frac{a \quad b \quad c}{4 \quad 3 \quad 1}$

Schritt 2: Baum erstellen und beschriften:



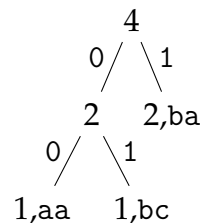
Schritt 3: Codierung einzelner Buchstaben ablesen. $\frac{a \quad b \quad c}{1 \quad 01 \quad 00}$

Schritt 4: Wort codieren. 110110100011

- b) Schritt 1: Wort in Blöcke der Länge 2 unterteilen. aa ba bc ba

Schritt 2: Vorkommen zählen. $\frac{aa \quad ba \quad bc}{1 \quad 2 \quad 1}$

Schritt 3: Baum erstellen und beschriften.



Schritt 4: Codierung einzelner Buchstaben ablesen. $\frac{aa \quad ba \quad bc}{00 \quad 1 \quad 01}$

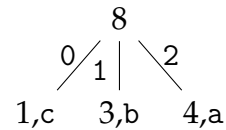
Schritt 5: Wort codieren. 001011

- Man benötigt die Zuordnung der im Wort vorkommenden Blöcke der Länge n zu deren Codierungen.
- Da man sich die Zuordnung von w zu 0 (oder 1) merken müsste um decodieren zu können. Dann hätte man aber erst gar nicht codieren müssen.

- e) Bei der Erstellung des Baumes verbindet man die drei Knoten mit den kleinsten Beschriftungen (anstatt der zwei Knoten mit den kleinsten Beschriftungen). Beim entstandenen ternären Baum beschriftet man die linken Kanten mit 0, die mittleren mit 1 und die rechten Kanten mit 2. Die Codierung eines Wortes liest man ab, indem man dem Pfad von der Wurzel bis zu diesem Wort folgt und die gesehenen Kantenbeschriftungen von links nach rechts notiert.

Schritt 1: Vorkommen zählen. $\frac{a \quad b \quad c}{4 \quad 3 \quad 1}$

Schritt 2: Baum erstellen und beschriften.



Schritt 3: Codierung einzelner Buchstaben ablesen. $\frac{a \quad b \quad c}{0 \quad 1 \quad 2}$

Schritt 5: Wort codieren. 00101210

Aufgabe 4.2 (3 + 2 = 5 Punkte)

Es sei $\text{Val} = \{0, 1\}^4$, es sei $\text{Adr} = \{0, 1\}^4$ und es sei $\text{Mem} = \text{Val}^{\text{Adr}}$.

- a) Es sei $m \in \text{Mem}$, es sei $a \in \text{Adr}$, es sei $a' \in \text{Adr}$, es sei $v \in \text{Val}$ und es sei $v' \in \text{Val}$. Geben Sie

$$\begin{aligned}
 & \text{memread}(\text{memwrite}(m, a, v), a), \\
 & \text{memread}(\text{memwrite}(\text{memwrite}(m, a, v), a', v'), a) \text{ und} \\
 & \text{memread}(\text{memwrite}(\text{memwrite}(m, a, v), a', v'), a')
 \end{aligned}$$

an.

- b) Es sei $m \in \text{Mem}$ derart, dass $m(0001) = 0100$ und $m(0010) = 0101$. Geben Sie

$$\begin{aligned}
 & \text{memread}(\text{memwrite}(m, \text{Repr}_2(\text{Num}_2(\text{memread}(m, 0001))) \\
 & \quad + \text{Num}_2(\text{memread}(m, 0010))), 0011), 0011)
 \end{aligned}$$

an.

Lösung 4.2

- a) $\text{memread}(\text{memwrite}(m, a, v), a) = v$

$$\text{memread}(\text{memwrite}(\text{memwrite}(m, a, v), a', v'), a) = \begin{cases} v', & \text{falls } a = a', \\ v, & \text{falls } a \neq a'. \end{cases}$$

Den Effekt, dass die Variablen a und a' obschon sie verschieden sind denselben Speicherort bezeichnen können heißt *Aliasing*. Dieser Effekt erschwert die Verifikation von Software in Programmiersprachen in denen Aliasing möglich ist.

$$\text{memread}(\text{memwrite}(\text{memwrite}(m, a, v), a', v'), a') = v'$$

b) Es ist

$$\begin{aligned} & \text{memread}(\text{memwrite}(m, \text{Repr}_2(\text{Num}_2(\text{memread}(m, 0001))) \\ & \quad + \text{Num}_2(\text{memread}(m, 0010))), 0011), 0011) \\ & = \text{memread}(\text{memwrite}(m, 1001, 0011), 0011) \\ & = m(0011). \end{aligned}$$

Aufgabe 4.3 (2 + 1 + 2 = 5 Punkte)

Es seien A und B zwei Alphabete. Weiter sei die Abbildung $\text{map}: A^* \times (B^*)^A \rightarrow B^*$ im ersten Argument induktiv definiert durch

$$\begin{aligned} & \forall f \in (B^*)^A: \text{map}(\epsilon, f) = \epsilon, \\ & \forall f \in (B^*)^A \forall a \in A \forall v \in A^*: \text{map}(a \cdot v, f) = f(a) \cdot \text{map}(v, f). \end{aligned}$$

a) Nun sei $A = \{a, b\}$, $B = \{0, 1\}$ und

$$\begin{aligned} f: A &\rightarrow B^*, \\ a &\mapsto 0, \\ b &\mapsto 1. \end{aligned}$$

Geben Sie $\text{map}(\epsilon, f)$, $\text{map}(b, f)$, $\text{map}(ba, f)$ und $\text{map}(baabba, f)$ an.

b) Jetzt sei $A = \{a, b, c\}$, $B = \{0, 1\}$ und

$$\begin{aligned} f: A &\rightarrow B^*, \\ a &\mapsto 0, \\ b &\mapsto 10, \\ c &\mapsto 11. \end{aligned}$$

Geben Sie $\text{map}(aababcba, f)$ an.

c) Hier sei $A = \{0, 1\}$, $B = \{0, 1\}$ und

$$\begin{aligned} f: A &\rightarrow B^*, \\ x &\mapsto \text{Repr}_2((\text{num}_2(x) + 1) \bmod 2). \end{aligned}$$

Geben Sie $\text{map}(01101, f)$ und $\text{map}(\text{map}(01101, f), f)$ an.

Lösung 4.3

a) $\text{map}(w, f)$ ersetzt jedes Vorkommen von a in w durch 0 und jedes Vorkommen von b in w durch 1 .

- $\text{map}(\epsilon, f) = \epsilon$
- $\text{map}(b, f) = 1$
- $\text{map}(ba, f) = 10$
- $\text{map}(baabba, f) = 100110$

b) $\text{map}(w, f)$ ist eine Huffman-Codierung von w .

- $\text{map}(\text{aababcba}, f) = 001001011100$
- c) $\text{map}(w, f)$ dreht jedes bit in w um. Insbesondere gilt $\text{map}(\text{map}(w, f), f) = w$.
- $\text{map}(01101, f) = 10010$
 - $\text{map}(\text{map}(01101, f), f) = \text{map}(10010, f) = 01101$

***Aufgabe 4.4 (1 + 2 = 3 Extrapunkte)**

Fortsetzung von Aufgabe 4.3.

Es sei C eine Menge und die Abbildung $\text{fold}: C \times B^* \times C^{C \times B} \rightarrow C$ im zweiten Argument induktiv definiert durch

$$\forall c \in C \forall g \in C^{C \times B}: \text{fold}(c, \epsilon, g) = c,$$

$$\forall c \in C \forall b \in B \forall v \in B^* \forall g \in C^{C \times B}: \text{fold}(c, b \cdot v, g) = \text{fold}(g(c, b), v, g).$$

a) Nun sei $B = \{a, b\}$, $C = \{t, f\}$ und

$$g: C \times B \rightarrow C,$$

$$(f, a) \mapsto t,$$

$$(f, b) \mapsto f,$$

$$\forall y \in B: (t, y) \mapsto t.$$

Geben Sie $\text{fold}(f, a, g)$, $\text{fold}(f, b, g)$, $\text{fold}(f, \text{bbbbb}, g)$ und $\text{fold}(f, \text{bbbab}, g)$ an.

b) Jetzt sei $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{0, 1\}$, $C = \mathbb{N}_0$,

$$f: A \rightarrow B,$$

$$x \mapsto \text{Repr}_2(\text{num}_{10}(x) \bmod 2),$$

und

$$g: C \times B \rightarrow C,$$

$$(z, y) \mapsto z + \text{num}_2(y).$$

Geben Sie $\text{map}(332897, f)$, $\text{fold}(0, \text{map}(332897, f), g)$, $\text{fold}(0, \text{map}(26842, f), g)$ und $\text{fold}(0, \text{map}(35791, f), g)$ an.

Lösung 4.4

- a) $\text{fold}(f, w, g)$ ist t falls in w der Buchstabe a vorkommt und f sonst.
- $\text{fold}(f, a, g) = t$
 - $\text{fold}(f, b, g) = f$
 - $\text{fold}(f, \text{bbbbb}, g) = f$
 - $\text{fold}(f, \text{bbbab}, g) = t$
- b) $\text{map}(w, f)$ ersetzt jedes Vorkommen einer geraden Ziffer in w durch 0 und jedes Vorkommen einer ungeraden Ziffer durch 1.
 $\text{fold}(0, w, g)$ zählt die Vorkommen von 1 in w .
- $\text{map}(332897, f) = 110011$

- $\text{fold}(0, \text{map}(332897, f), g) = \text{fold}(0, 110011, g) = 4$
- $\text{fold}(0, \text{map}(26842, f), g) = \text{fold}(0, 00000, g) = 0$
- $\text{fold}(0, \text{map}(35791, f), g) = \text{fold}(0, 11111, g) = 5$