Klausur zur Vorlesung
Grundbegriffe der Informatik
5. März 2014

Klausur-nummer

Nachname:
Vorname:
Matr.-Nr.:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
max. Punkte	6	8	4	7	5	6	8
tats. Punkte							

Gesamtpunktzahl:			Note:	

Punkte

Aufgabe 1 (1+1+1+1+1+1 = 6 Punkte)

a) Geben Sie einen regulären Ausdruck R an, so dass gilt:

$$\langle \mathsf{R} \rangle = \{w \mid w \in \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^* \text{ und die Länge von } w \text{ ist gerade }\}.$$

Hinweis: Benutzen Sie bitte höchstens die Symbole a, b, (,), |, * und ∅ in dem regulären Ausdruck, aber keine anderen.

b) Geben Sie eine Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ an, für die gilt:

$f(n) \notin O(n^3) \wedge f(n) \notin \Omega(n^3)$.

c) Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm einer Halbordnung auf einer vierelementigen Menge, die 2 maximale und 3 minimale Elemente besitzt.

d) Nennen Sie ein algorithmisches Problem, das man nicht mit Turingmaschinen lösen kann.

e) Sei A ein Alphabet und $L \subseteq A^*$ eine formale Sprache, die nicht regulär ist. Für welche endlichen Teilmengen $L' \subset L$ existiert eine Typ-3-Grammatik, die L' erzeugt?

f) Es sei M eine Menge und $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit folgenden Eigenschaften:

- Jeder Knoten $A \in V$ ist eine Teilmenge $A \subseteq M$ von M.
- Eine Kante von Knoten A zu Knoten B existiert in G genau dann, wenn $A \subseteq B$ ist.
- Der Graph G ist streng zusammenhängend.

Wie viele Knoten hat G mindestens und wie viele Knoten hat G höchstens? *Hinweis:* Geben Sie möglichst gute Abschätzungen an! Die Antwort $|V|$ ist nicht erlaubt.

mindestens:	höchstens:

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 1:

Punkte

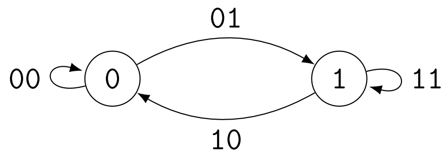
Aufgabe 2 (3+3+2 = 8 Punkte)

Es sei $G = (V, E)$ ein beliebiger endlicher gerichteter Graph. Der sogenannte *Kantengraph* $K(G) = (V', E')$ von G ist wie folgt definiert:

- $V' = E$
- $E' = \{\, ((x,y),(y,z)) \mid (x,y) \in E \land (y,z) \in E \,\}$

a) Gegeben sei der folgende Graph B_1, dessen Knoten und Kanten Namen tragen.

B_1 :



Zeichnen Sie den Graphen $B_2 = K(B_1)$ und geben Sie dabei den Knoten von B_2 geeignete Namen.

b) Beweisen Sie: Wenn in G jeder Knoten Ausgangsgrad 2 hat, dann hat in $K(G)$ auch jeder Knoten Ausgangsgrad 2.

Hinweis: Sie müssen keinen Induktionsbeweis führen.

c) Für alle $n \in \mathbb{N}_+$ sei der Graph B_{n+1} definiert als $B_{n+1} = K(B_n)$. Füllen Sie die folgende Tabelle aus. Geben Sie dabei in der letzten Spalte geschlossene Formeln an.

Graph	B_1	B_2	B_3	B_n
Anzahl Knoten				
Anzahl Kanten				

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 2:

Punkte

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei A ein Alphabet. Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: Für jede formale Sprache $L \subset A^*$, die genau n Wörter enthält, gibt es einen regulären Ausdruck R mit $\langle R \rangle = L$.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 3:

Punkte

Aufgabe 4 (2+2+2+1 = 7 Punkte)

Gegeben sei die kontextfreie Grammatik $G = (N, T, S, P)$ mit $N = \{S, X\}$, $T = \{\ \texttt{<}\ ,\ \texttt{>}\ ,\ \texttt{/}\ ,\ \texttt{a}\ ,\ \texttt{b}\ \}$ und Produktionenmenge

$$P = \{\ S \to SS \mid \texttt{<}X\texttt{>} \mid \texttt{b} \mid \varepsilon\ \ ,\ \ X \to \texttt{a}X\texttt{a} \mid \texttt{>}S\texttt{</}\ \}$$

Die von G erzeugte formale Sprache werde mit L bezeichnet, also $L = L(G)$.

a) Zeichnen Sie den Ableitungsbaum für das Wort <aa></aa><a>bb.

b) Erklären Sie, warum für alle $k \in \mathbb{N}_+$ die Teilmenge $L \cap T^{9k}$ von $L(G)$ mindestens 2^k Wörter enthält.

   Hinweis: Sie müssen keinen Induktionsbeweis führen.

c) Beweisen Sie, dass $L \cdot L = L$ ist.

d) Geben Sie eine beliebige unendliche formale Sprache L' an, für die $L' \cdot L' \neq L'$ ist.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 4:

Punkte

Aufgabe 5 (2+1+1+1 = 5 Punkte)

Für eine Relation $R \subseteq M \times M$ auf einer Menge M definieren wir die Relation R^{-1} wie folgt:

$$R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\} .$$

a) Es sei $S \subseteq M \times M$ eine weitere Relation auf M.
Geben Sie an, wie $S \circ R$ definiert ist.

b) Geben Sie die Relation $R^{-1} \circ R$ in der Form $R^{-1} \circ R = \{\ldots \mid \ldots\ldots\}$ an, ohne in der Mengenklammer die Zeichenfolge „R^{-1}" hinzuschreiben.

c) Es sei $\mathrm{Id}_M = \{(x, x) \mid x \in M\}$.
Welche Eigenschaft hat die Relation R, wenn $R^{-1} \circ R \subseteq \mathrm{Id}_M$ ist?

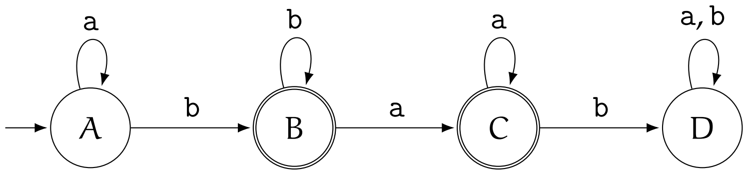
d) Beweisen Sie Ihre Behauptung aus Teilaufgabe c).

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 5:

Punkte

Aufgabe 6 (2+3+1 = 6 Punkte)

Es sei der folgende endliche Akzeptor M mit Zustandsmenge $Z = \{A, B, C, D\}$ und Eingabealphabet $X = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ gegeben:



a) Geben Sie einen regulären Ausdruck R an, so dass gilt: $\langle R \rangle = L(M)$.

   Hinweis: Benutzen Sie bitte höchstens die Symbole a, b, (,), |, * und Ø in dem regulären Ausdruck, aber keine anderen.

b) Geben sie einen endlichen Akzeptor an, der folgende formale Sprache akzeptiert:

$$\{w \mid w \in L(M) \text{ und die Anzahl } N_{\mathtt{a}}(w) \text{ der } \mathtt{a} \text{ in } w \text{ ist gerade } \}$$

   Hinweis: Es muss sich um einen vollständigen deterministischen endlichen Akzeptor handeln wie er in der Vorlesung definiert wurde.

c) Wie viele verschiedene formale Sprachen kann man mit endlichen Akzeptoren erkennen, deren Eingabealphabet, Zustandsmenge, Anfangszustand und Zustandsüberführungsfunktion wie bei dem oben angegebenen Akzeptor M sind?

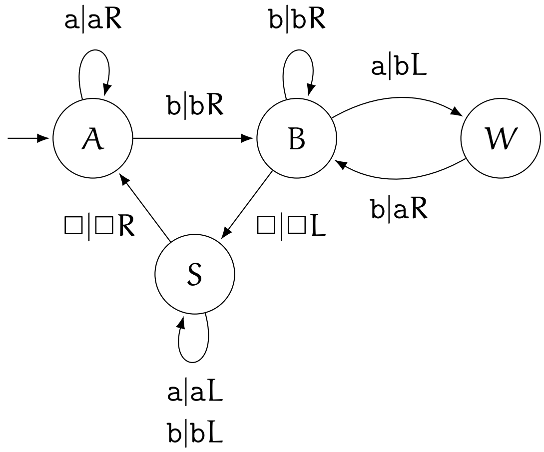
Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 6:

Punkte

Aufgabe 7 (4+1+3 = 8 Punkte)

Gegeben sei die Turingmaschine T mit Zustandsmenge $Z = \{A, B, W, S\}$, Anfangszustand A und Bandalphabet $X = \{\square, \mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. Die Arbeitsweise ist wie folgt festgelegt:

	A	B	W	S
$\mathtt{a}$	$(A, \mathtt{a}, R)$	$(W, \mathtt{b}, L)$		$(S, \mathtt{a}, L)$
$\mathtt{b}$	$(B, \mathtt{b}, R)$	$(B, \mathtt{b}, R)$	$(B, \mathtt{a}, R)$	$(S, \mathtt{b}, L)$
$\square$		$(S, \square, L)$		$(A, \square, R)$



Die Turingmaschine wird im folgenden benutzt für Bandbeschriftungen, bei denen zu Beginn der Berechnung auf dem Band ein Wort $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^+$ steht, das von Blanksymbolen $\square$ umgeben ist. Der Kopf der Turingmaschine stehe anfangs auf dem ersten Symbol des Eingabewortes.

a) Geben Sie für die Eingabe `babaa` folgende Konfigurationen an:
   - ausgehend von der Anfangskonfiguration jede Konfiguration bis die Turingmaschine zum ersten Mal in Zustand S ist;
   - die Konfiguration, die vorliegt, nachdem die Turingmaschine zum ersten Mal von Zustand S nach Zustand A gewechselt hat.
   - die Konfiguration, die vorliegt, nachdem die Turingmaschine zum zweiten Mal von Zustand S nach Zustand A gewechselt hat.

   Benutzen Sie bitte möglichst die Tabelle auf der nächsten Seite.

b) Für jede Eingabe $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^+$ gilt: Wenn die Turingmaschine hinreichend viele Schritte gemacht hat, dann ändert sich die Bandbeschriftung nicht mehr. Welches Wort steht dann auf dem Band?

c) Ändern Sie die Turingmaschine so ab, dass die Turingmaschine irgendwann anhält, nachdem sich die Bandbeschriftung nicht mehr ändert. Zeichen Sie bitte das Zustandsdiagramm; geben Sie *keine Tabelle* an.

   Hinweis: Ein zusätzlicher Zustand genügt. Wenn Sie mehr als drei zusätzliche Zustände benötigen, bekommen Sie nicht die volle Punktzahl auf diese Teilaufgabe.

Name: Matr.-Nr.:

Platz für Antworten zu Aufgabe 7a): Schreiben Sie jeweils in die untere Zeile eines Kastens die Bandbeschriftung und in die obere über dem aktuell besuchten Feld den Zustand. Füllen Sie erst die linke Spalte, danach die rechte. Die Anfangskonfiguration ist angegeben. Es ist mehr Platz als nötig.

	A					
	b	a	b	a	a	

nach erstem Wechsel S → A:

nach zweitem Wechsel S → A:

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 7: