Klausur zur Vorlesung
Grundbegriffe der Informatik
16. September 2013

**Klausur-
nummer**

Name:
Vorname:
Matr.-Nr.:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
max. Punkte	10	9	12	6	10	5	8
tats. Punkte							

Gesamtpunktzahl:		Note:

Aufgabe 1 (10 Punkte)
Kreuzen Sie für die folgenden Aussagen an, ob sie wahr oder falsch sind.

Hinweis: Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Wenn Sie kein Kreuz setzen, bekommen Sie weder Plus- noch Minuspunkt, für das Ankreuzen beider Möglichkeiten wird ein Punkt abgezogen. Die gesamte Aufgabe wird mit mindestens 0 Punkten bewertet.

a) $\forall n, k \in \mathbb{N}_+ : n \bmod k + n \operatorname{div} k = n$. wahr: ☐ falsch: ☐

b) $\exists k \in \mathbb{N}_0 : n \in O((\log_2 n)^k)$. wahr: ☐ falsch: ☐

c) $\log_2(x^4) \in O(\log_2 x)$. wahr: ☐ falsch: ☐

d) $$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
W ist die Wegematrix eines Graphen. wahr: ☐ falsch: ☐

e) Das Umbennen der Knoten eines Graphen entspricht dem Vertauschen der Zeilen der Wegematrix. wahr: ☐ falsch: ☐

f) Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ ist ein Baum, wenn gilt: $\forall x \in V : d^-(x) < 2$. wahr: ☐ falsch: ☐

g) $((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C) \wedge (A \Rightarrow A)) \Leftrightarrow (B \vee C \vee \neg B \vee A)$
wahr: ☐ falsch: ☐

h) L_2 sei eine reguläre Sprache und $L_1 \subseteq L_2$.
$L_1 \cap L_2$ ist regulär. wahr: ☐ falsch: ☐

i) Sei $L = \{w\}$. Die Nerode-Äquivalenzrelation R_L hat $|w| + 2$ Äquivalenzklassen. wahr: ☐ falsch: ☐

j) Es existieren reguläre Sprachen L_1, L_2 und ein Homomorphismus $h : h(L_1) = L_2$, so dass gilt:
$|L_1| = \infty$ und $|L_2| = n$, mit $n \in \mathbb{N}_0$. wahr: ☐ falsch: ☐

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 1:

Aufgabe 2 (9 Punkte)

a) Zeichnen Sie alle ungerichteten nicht-isomorphen Graphen mit 5 Knoten, für die gilt:
Genau ein Knoten besitzt Grad 4, alle anderen Knoten haben Grad 2.

Hinweis: Es gibt Punktabzug für Graphen, die nicht verlangt waren. Die gesamte Teilaufgabe wird mit mindestens 0 Punkten bewertet. Sie brauchen die Knoten nicht zu benennen. [*4 Punkte*]

b) In dieser Teilaufgabe geht es um gerichtete Graphen.
Geben Sie eine kurze formale mathematische Definition an für den Begriff *Ausgangsgrad* $d^+(x)$ eines Knotens x. [*2 Punkte*]

c) Zeigen oder widerlegen Sie:

In jedem gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit mindestens zwei Knoten gibt es zwei verschiedene Knoten $x, y \in V$ mit $d^+(x) = d^+(y)$, wenn es keinen Knoten $z \in V$ mit $d^+(z) = 0$ gibt. [*3 Punkte*]

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 2:

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Gegeben sei das Alphabet $A = \{\mathtt{0},\mathtt{1},\mathtt{2}\}$. Weiter sei $f(n)$ die Anzahl der Wörter $w \in A^*$ mit Länge $n \in \mathbb{N}_+$, die das Teilwort $w_t = \mathtt{22}$ nicht enthalten.

a) Berechnen Sie $f(1), f(2)$ und $f(3)$. *[2 Punkte]*

b) Es gelte zusätzlich $|w| \geq 2$. Geben Sie alle Möglichkeiten an für die beiden letzten Zeichen für solch ein w, das mit $\mathtt{2}$ endet. *[0,5 Punkte]*

c) Es gelte zusätzlich $|w| \geq 3$. Geben Sie alle Möglichkeiten an für die drei letzten Zeichen für solch ein w, das mit $\mathtt{2}$ endet. *[1 Punkt]*

d) Geben Sie eine rekursive Definition für $f(n)$ an.

   Hinweis: Überlegen Sie sich dabei wie sich die Anzahl der Wörter verändert, wenn Sie w um ein Zeichen erweitern. *[4,5 Punkte]*

e) Zeigen Sie per Induktion: $\forall n \geq 2 : f(n) \geq 2^{n+1}$. *[4 Punkte]*

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 3:

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Gegeben sei folgende kontextfreie Grammatik $G = (\{S, A, B\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}, S, P\})$ mit

$$\begin{aligned} P = \{S &\to AB, \\ A &\to \mathtt{a}A\mathtt{b} \mid \mathtt{ab}, \\ B &\to \mathtt{b}B\mathtt{c} \mid \mathtt{bc}\}. \end{aligned}$$

a) Geben Sie alle Wörter der Länge 6 an, die in $L(G)$ liegen. [*2 Punkte*]

b) Modifizieren Sie G zur kontextfreien Grammatik G', so dass gilt: $L(G') = L$, mit $L = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j\mathtt{c}^k\mathtt{d}^l \mid i, j, k, l \in \mathbb{N}_+ \text{ und } (i + k = j + l)\}$.

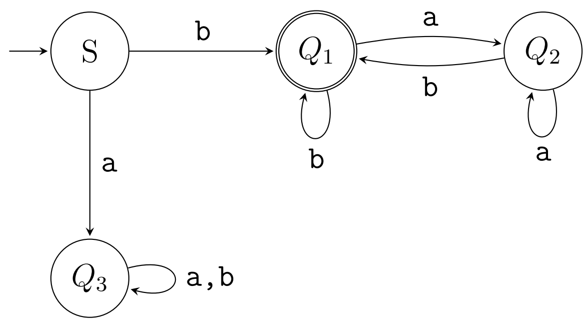
[*4 Punkte*]

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 4:

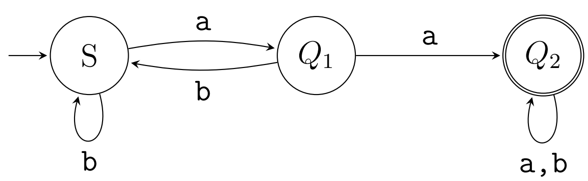
Aufgabe 5 (10 Punkte)

Gegeben seien folgende zwei Akzeptoren A_1 und A_2

A_1:



A_2:



a) Geben Sie zwei reguläre Ausdrücke R_1 und R_2 an, so dass $\langle R_1 \rangle = L(A_1)$ und $\langle R_2 \rangle = L(A_2)$. *[2 Punkte]*

b) Geben Sie einen Akzeptor B_1 (wie in der Vorlesung definiert) an, so dass $L(B_1) = \{w \mid w \in L(A_1) \wedge w \notin L(A_2)\}$. *[3 Punkte]*

c) Geben Sie einen Akzeptor B_2 (wie in der Vorlesung definiert) an, so dass $L(B_2) = \{w \mid w \in L(A_2) \wedge w \notin L(A_1)\}$. *[5 Punkte]*

Hinweis: Benutzen Sie für Ihre Akzeptoren jeweils maximal 9 Zustände.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 5:

Aufgabe 6 (5 Punkte)

Für $0 \leq i < |w|$ bezeichne $w(i)$ das $(i+1)$-te Zeichen eines Wortes $w \in \{0,1\}^+$. $w(0)$ bezeichnet also z.B. das erste Zeichen, $w(1)$ das zweite, usw.

Gegeben ist das folgende Programmstück, das $f(w,a,b) = r$ für Eingaben $a, b \in \mathbb{N}_0$ berechnet und r ausgibt.

$f(w,a,b)\{$
if $(a = b)$ then
    $r \leftarrow w(a)$
else
    $c \leftarrow (a+b)$ div 2
    $d \leftarrow f(w,a,c)$
    $e \leftarrow f(w,c+1,b)$
    $r \leftarrow d + e - 2 * d * e$
fi
return r
$\}$

Machen Sie eine Beispielrechnung für $f(1011,0,3)$. Geben Sie dabei die Werte der einzelnen Variablen an, wenn sich deren Wert ändert.

Sie können die folgenden Tabellen für die einzelnen Berechnungen von $f(w,a,b)$ benutzen.

f(w, ,)	**c**	**d**	**e**	**r**
—				

f(w, ,)	**c**	**d**	**e**	**r**
—				

f(w, ,)	**c**	**d**	**e**	**r**
—				

f(w, ,)	**c**	**d**	**e**	**r**
—				

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 6:

f(w, ,)	**c**	**d**	**e**	**r**
—				

f(w, ,)	**c**	**d**	**e**	**r**
—				

Aufgabe 7 (8 Punkte)

Sei T die Turingmaschine, die als Eingabe ein Wort w über $\{\mathtt{0}, X\}$ erhält und folgenden Homomorphismus h berechnet

$h(\mathtt{0}) = \mathtt{0},\ h(X) = \epsilon$,

so dass nach der Abarbeitung (umgeben nur von Blanksymbolen) $h(w)$ auf dem Band steht.

Der Kopf der Turingmaschine stehe zu Beginn auf dem ersten Symbol von w (sofern w nicht das leere Wort ist).

a) Geben Sie T explizit grafisch an. [*5 Punkte*]

b) Geben Sie in Abhängigkeit der Länge des Eingabewortes w eine möglichst scharfe obere Schranke in O-Notation für die worst case Laufzeit von T an. [*1 Punkt*]

c) Geben Sie in Abhängigkeit der Länge des Eingabewortes w eine Eingabe an, deren Bearbeitung (bis auf einen konstanten Faktor) worst case Laufzeit benötigt. [*1 Punkt*]

d) Geben Sie in Abhängigkeit der Länge des Eingabewortes w eine Eingabe an, deren Bearbeitung asymptotisch nicht worst case Laufzeit benötigt. [*1 Punkt*]

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 7:

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 7:

Schmierpapier

Schmierpapier

Schmierpapier

Schmierpapier