Grundbegriffe der Informatik
Musterlösung zu Aufgabenblatt 3

Aufgabe 3.1 (2+2+3 Punkte)
Es sei $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. Beschreiben Sie unter Benutzung nur der Symbole {, }, a, b, ϵ, $\cup$, * und $^+$, sowie runde Klammer auf, runde Klammer zu und Komma, die folgenden formalen Sprachen:

a) die Menge aller Wörter über A, bei denen bb direkt vor jedem a steht;

b) die Menge aller Wörter über A, die ungerade Länge haben;

c) die Menge aller Wörter über A, die gleiche viele Teilwörter ab und ba enthalten.

Lösung 3.1

a) $\{\mathtt{b,bba}\}^*$ oder auch $(\{\mathtt{b}\}^*\{\mathtt{bba}\}^*\{\mathtt{b}\}^*)^*$

b) $(\{\mathtt{a}\} \cup \{\mathtt{b}\})\{\mathtt{aa,ab,ba,bb}\}^*$

c) $\{\mathtt{a}\}^+(\{\mathtt{b}\}^+\{\mathtt{a}\}^+)^* \cup \{\mathtt{b}\}^+(\{\mathtt{a}\}^+\{\mathtt{b}\}^+)^* \cup \{\varepsilon\}$

Aufgabe 3.2 (1+1+1 Punkte)
Es sei $A = \{\mathtt{a,b}\}$ und $L = \{\mathtt{aa,aaa,b}\}$.
Geben Sie (wenn möglich) für folgende Sprachen je 2 Wörter über A an die in der Sprache liegen und je 2 Wörter über A die nicht in der Sprache liegen.

a) $L_1 = \{w \mid w \in L^2 \wedge w \in L^3\}$

b) $L_2 = \{w \in A^* \mid \exists u \in A^* : \exists v \in L : w = uv\}$

c) $L_3 = \{w \in L^* \mid \exists u \in A^* : uw = w^2u\}$

Lösung 3.2

a) aaaaaa ist das einzige Wort $\in L_1$ und z.B. $\mathtt{a,b} \notin L_1$

b) Z.B. $\mathtt{aa,ab} \in L_2$ und z.B. $\varepsilon\mathtt{,a,ba} \notin L_2$

c) ε ist das einzige Wort $\in L_3$ und z.B. $\mathtt{a,b} \notin L_3$

Aufgabe 3.3 (3+3+4 Punkte)
Gegeben seien beliebige formale Sprachen $L_1, L_2, L_3 \subseteq A^*$. Beweisen oder widerlegen Sie:

a)
$$|L_1^2| = |L_1 \times L_1|$$

b)
$$(L_1 \cup L_2)^* \cdot L_3^* = (L_1 \cdot L_3^*) \cup (L_2 \cdot L_3^*)$$

c)
$$(L_1 \cup L_2)^* = (L_1^* \cdot L_2^*)^*$$

Hinweis: Sie dürfen folgende Umformung benutzen: $L^* = L^* L^* = (L^*)^*$

Lösung 3.3

a) Gegenbeispiel: $L_1 = \{\varepsilon, \mathtt{a}\}$:
$|L_1^2| = |\{\varepsilon, \mathtt{a}\} \cdot \{\varepsilon, \mathtt{a}\}| = |\{\varepsilon, \mathtt{a}, \mathtt{aa}\}| = 3$
$|L_1 \times L_1| = |\{\varepsilon, \mathtt{a}\} \times \{\varepsilon, \mathtt{a}\}| = |\{(\varepsilon,\varepsilon), (\varepsilon, \mathtt{a}), (\mathtt{a}, \varepsilon), (\mathtt{a}, \mathtt{a})\}| = 4$

b) Gegenbeispiel: $L_1 = \{\mathtt{a}\}, L_2 = \{\mathtt{b}\}, L_3 = \{\varepsilon\}$:
$\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \cdot \{\varepsilon\} = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$
$\{\mathtt{a} \cdot \varepsilon\} \cup \{\mathtt{b} \cdot \varepsilon\} = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$

c) Es werden beiden Teilmengenbeziehungen gezeigt:

- $(L_1 \cup L_2)^* = (L_1 \cdot \{\varepsilon\} \cup \{\varepsilon\} \cdot L_2)^* \subseteq (L_1 \cdot L_2^* \cup L_1^* \cdot L_2)^* \subseteq (L_1^* \cdot L_2^* \cup L_1^* \cdot L_2^*)^* = (L_1^* \cdot L_2^*)^*$
- $(L_1^* L_2^*)^* \subseteq ((L_1 \cup L_2)^* L_2^*)^* \subseteq ((L_1 \cup L_2)^* (L_1 \cup L_2)^*)^* = ((L_1 \cup L_2)^*)^* = (L_1 \cup L_2)^*$

Daraus folgt: $(L_1 \cup L_2)^* = (L_1^* \cdot L_2^*)^*$

Hinweis: 1 Punkt für die richtige Annahme, 2 Punkte für das korrekte Gegenbeispiel, 3 Punkte für den korrekten Beweis