Grundbegriffe der Informatik
Musterlösung zu Aufgabenblatt 12

Aufgabe 12.1 (4 Punkte)
Die Menge $M \subseteq \mathbb{Z}^2$ sei wie folgt definiert:

- $(3, 2) \in M$
- Wenn $(m, n) \in M$, dann ist auch $(3m - 2n, m) \in M$
- Keine anderen Elemente liegen in M.

Zeigen Sie durch strukturelle Induktion, dass alle Elemente aus M folgende Form haben: $(2^{k+1} + 1, 2^k + 1)$, mit $k \in \mathbb{N}_0$.

Lösung 12.1

Induktionsanfang: für das atomare Element $(3, 2)$ gilt die Eigenschaft: $(3, 2) = (2^{0+1} + 1, 2^0 + 1)$ $\surd$

Induktionsvoraussetzung:
Für ein beliebiges, aber festes Element aus M gilt: $(m, n) = (2^{k+1}+1, 2^k+1)$.

Induktionsschluss: Es gilt zu zeigen, dass die Eigenschaft auch für $(3m-2n, m)$ gilt (da dies die einzige "Produktion" weiterer Elemente aus M ist). Es muss also ein k' geben, für das gilt: $3m - 2n = 2^{k'+1} + 1 \wedge m = 2^{k'} + 1$.

Nach IV gilt: $3m-2n = (3 \cdot (2^{k+1}+1) - 2 \cdot (2^k+1)) = 3 \cdot 2^{k+1} + 3 - 2^{k+1} - 2 = 2 \cdot 2^{k+1} + 1$.

Wenn wir $k' = k + 1$ wählen, gilt $3m - 2n = 2^{k+2} + 1 = 2^{k'+1} + 1$ und $m = 2^{k+1} + 1 = 2^{k'} + 1$.

Aufgabe 12.2 (4+1+2 Punkte)
Die Turingmaschine T mit Anfangszustand S_0 sei gegeben durch

	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4
0	$(S_1, \square, 1)$	$(S_2, \mathtt{x}, 1)$	$(S_3, \mathtt{0}, 1)$	$(S_2, \mathtt{x}, 1)$	$(S_4, \mathtt{0}, -1)$
x	$-$	$(S_1, \mathtt{x}, 1)$	$(S_2, \mathtt{x}, 1)$	$(S_3, \mathtt{x}, 1)$	$(S_4, \mathtt{x}, -1)$
$\square$	$-$	$(e, \square, 1)$	$(S_4, \square, -1)$	$-$	$(S_1, \square, 1)$

Im Zustand e macht die Turingmaschine gar nichts mehr.
Der Kopf der Turingmaschine stehe anfangs auf dem ersten Symbol des Eingabewortes.

a) Geben Sie für die Eingaben 00000 und 000000 jeweils die Anfangskonfiguration, die Endkonfiguration und jede weitere Konfiguration an, die sich während der Berechnung nach einer Änderung der Bandbeschriftung ergibt.

b) Geben Sie zwei verschiedene Eingabeworte $w_1, w_2 \in \{\texttt{0}\}^*$ an, so dass T bei Eingabe von w_1 und bei Eingabe von w_2 irgendwann in den Zustand e kommt.

c) Für welche Wörter $w \in \{\texttt{0}\}^*$ endet die Turingmaschine in Zustand e?

Lösung 12.2

a) Wir schreiben den Zustand der Turingmaschine immer vor das Zeichen, auf dem sich der Kopf befindet.

Anfangskonfiguration: $S_0\texttt{00000}$

Zwischenkonfigurationen:

$\square S_1\texttt{0000}$
$\square\texttt{x}S_2\texttt{000}$
$\square\texttt{x0x}S_2\texttt{0}$
$\square\texttt{x0x0}S_3\square$

Endkonfiguration: $\texttt{x0x0}S_3\square$

Anfangskonfiguration: $S_0\texttt{000000}$

Zwischenkonfigurationen:

$\square S_1\texttt{00000}$
$\square\texttt{x}S_2\texttt{0000}$
$\square\texttt{x0x}S_2\texttt{00}$
$\square\texttt{x0x0x}S_2\square$
$\square\texttt{xx}S_2\texttt{x0x}\square$
$\square\texttt{xxx0x}S_3\square$

Endkonfiguration: $\texttt{xxx0x}S_3\square$

b) z.B. 0, 00, 0000, ...

c) Die Turingmaschine endet für $w \in \{\texttt{0}^{(2^n)} | n \in \mathbb{N}_0\}$ im Zustand e.

Aufgabe 12.3 (1+3+4 Punkte)
Gegeben sei ein Alphabet $A = \{\texttt{a}, \texttt{b}\}$ und eine Funktion $f : A^* \to A^*$, die folgendermaßen definiert ist:

$$f(\varepsilon) = \varepsilon$$
$$f(\texttt{a}w) = f(w)$$
$$f(\texttt{b}w) = \texttt{b}f(w)$$

a) Was berechnet die Funktion f? Geben Sie eine möglichst präzise, kurze Beschreibung in eigenen Worten an.
b) Erklären Sie, wie eine Turingmaschine vorgehen könnte, die ein Eingabewort $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$ durch $f(w)$ auf dem Band ersetzt und im Zustand e hält.
c) Geben Sie eine Turingmaschine $T = (Z, z_0, X, f, g, m)$ mit höchstens 10 Zuständen an, die ein Eingabewort $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$ durch $f(w)$ auf dem Band ersetzt und im Zustand e hält.
Hinweis: Es gibt eine solche Turingmaschine mit 6 Zuständen inkl. Zustand e

Lösung 12.3

a) Die Funktion f entfernt alle `a` aus einem Wort $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$.

b) Als ersten Schritt sortiert die Turingmaschine die vorkommenden `a` und `b` zu `b`∗`a`∗. Dabei läuft die TM von links nach rechts und sucht das erste `a`. Das erste `b`, welches danach folgt, wird an den Anfang geschoben und die TM beginnt von vorne mit dem Sortiervorgang.

Folgt auf ein `a` ein $\square$, sind folglich alle `b` an den Anfang geschoben und das Sortieren ist beendet. Es verbleibt noch das Löschen der `b`, indem die TM von rechts nach links läuft und die vorkommenden `b` vom Band entfernt.

c)

	z_0	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
`a`	$(\mathtt{a}, Z_1, 1)$	$(\mathtt{a}, Z_1, 1)$	$(\mathtt{a}, Z_2, -1)$	$(\mathtt{b}, z_0, 1)$	$(\square, Z_4, -1)$
`b`	$(\mathtt{b}, z_0, 1)$	$(\mathtt{a}, Z_2, -1)$	$(\mathtt{b}, Z_3, 1)$	–	$(\mathtt{b}, Z_4, -1)$
$\square$	$(\square, Z_4, -1)$	$(\square, Z_4, -1)$	$(\square, Z_3, 1)$	–	$(\square, e, 1)$

Hinweis: Es ist durchaus möglich, das es korrekte Turing Maschinen mit weniger Zuständen gibt. Es stand ja auch nicht in der Aufgabe, das $5 + 1$ die minimale Anzahl an Zuständen ist.