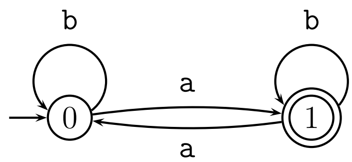
Grundbegriffe der Informatik
Musterlösung zu Aufgabenblatt 11

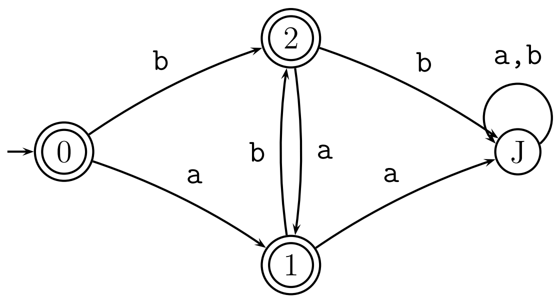
Aufgabe 11.1 (3+3+3+4 Punkte)
Geben Sie für die folgenden Sprachen L_i jeweils einen Endlichen Akzeptor A_i, einen Regulären Ausdruck R_i und eine Rechtslineare Grammatik G_i an, so dass für $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ gilt: $L(A_i) = \langle R_i \rangle = L(G_i) = L_i$.
Hinweis: Benutzen Sie für Ihren Akzeptor jeweils möglichst wenig Zustände.

a) $L_1 = \{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid N_{\mathtt{a}}(w) \bmod 2 = 1\}$.
b) $L_2 = \{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid w$ enthält weder das Teilwort `aa` noch das Teilwort `bb`$\}$.
c) $L_3 = \{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid$ Das vorletzte Zeichen in w ist ein `a`$\}$.
d) $L_4 = \{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid w$ hat gerade Länge und enthält das Teilwort `aa`$\}$.

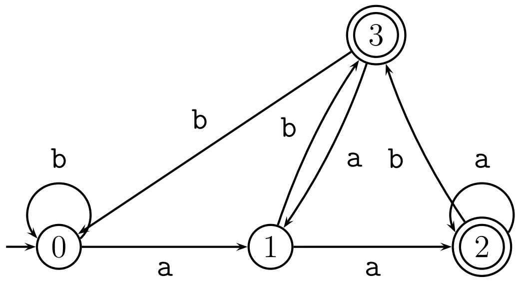
Lösung 11.1



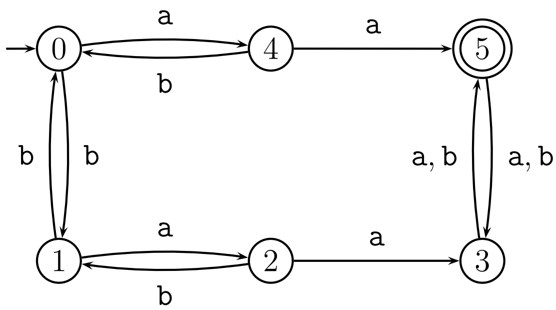
a) • Akzeptor:
- regulärer Ausdruck: `b*ab*(ab*ab*)*`
- rechtslineare Grammatik: $G = (\{S, A\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, S, \{S \to \mathtt{b}S \mid \mathtt{a}A,$
  $A \to \mathtt{b}A \mid \varepsilon \mid \mathtt{a}S\})$



b) • Akzeptor:
- regulärer Ausdruck: $\emptyset$`* | (b|ab)(ab)* | (a|ba)(ba)*`
- rechtslineare Grammatik: $G = (\{S, A, B\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, S, \{S \to \varepsilon \mid \mathtt{b}B \mid \mathtt{a}A,$
  $A \to \mathtt{b}B \mid \varepsilon,$
  $B \to \varepsilon \mid \mathtt{a}A\})$



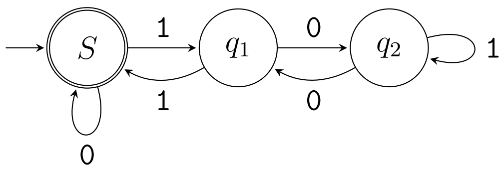
c)
- Akzeptor:
- regulärer Ausdruck: `(a|b)*a(a|b)`
- rechtslineare Grammatik: $G = (\{S, A\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, S, \{S \to \mathtt{a}S \mid \mathtt{b}S \mid \mathtt{a}A,$
  $A \to \mathtt{a} \mid \mathtt{b}\})$



d)
- Akzeptor:
- regulärer Ausdruck: `((a|b)(a|b))* (aa | ((a|b)(aa)(a|b))) ((a|b)(a|b))*`
- rechtslineare Grammatik: $G = (\{S, A, A_2, B, B_1, B_2\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, S,$
  $\{S \to \mathtt{a}A \mid \mathtt{b}B,$
  $A \to \mathtt{a}A_2 \mid bS,$
  $A_2 \to \mathtt{a}B_2 \mid \mathtt{b}B_2 \mid \varepsilon,$
  $B \to \mathtt{a}B_1 \mid bS,$
  $B_1 \to \mathtt{a}B_2 \mid bB,$
  $B_2 \to \mathtt{a}A_2 \mid bA_2\})$

Aufgabe 11.2 (1+1 Punkte)

Geben Sie zu folgendem Endlichen Akzeptor A



a) einen regulären Ausdruck R an, so dass $L(A) = \langle R \rangle$ und

b) eine kurze, möglichst präzise Beschreibung für $L(A)$ in eigenen Worten an. *Hinweis:* Interpretieren Sie dabei die Eingabe als Binärzahl.

Lösung 11.2

a) $(0|1(01*0)*1)*$

b) Der Akzeptor akzeptiert genau die durch 3 teilbaren Binärzahlen und ε.

Aufgabe 11.3 (1+4 Punkte)
Gegeben sei ein Endlicher Akzeptor $A = (Z, z_0, X, f, F)$, der die Sprache $L \subseteq X^*$ akzeptiert. Gesucht ist ein Endlicher Akzeptor A^c, für den gilt: $L(A^c) = L^c$, mit $L^c = \{w \mid w \in X^* \wedge w \notin L\}$.

a) Geben Sie A^c an.

b) Beweisen Sie durch vollständige Induktion über die Wortlänge $|w|$, dass für Ihren Akzeptor A^c aus Teilaufgabe a) gilt: $L(A^c) = L^c$.

Lösung 11.3

a) $A^c = (Z, z_0, X, f, Z \setminus F)$

b) Wir müssen zeigen, dass jedes w, das A zu einem akzeptierenden Zustand führt, in A^c zu einem nicht akzeptierenden Zustand führt **und** jedes Wort w, das A zu einem nicht akzeptierenden Zustand führt, in A^c zu einem akzeptierenden Zustand führt.

- Wir betrachten $w \in L(A)$:

  Induktionsanfang: $|w| = 0$: D.h. $w = \varepsilon$. Da $w \in L(A)$ heisst das, q_0 ist akzeptierender Zustand in A. Nach Konstruktion aus Teilaufgabe a) heisst das auch, dass q_0 kein akzeptierender Zustand in A^c ist. $\surd$

  Induktionsvoraussetzung:
  Für beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}_0$ mit $|w_n| = n$ gilt: $w_n \in L(A) \wedge w_n \notin L(A^c)$.

  Induktionsschluss: Sei $w = w_n x$, mit $x \in X$. Da wir $w \in L(A)$ betrachten, führt $f^*(z_0, w) = f^*(z_0, w_n x) = f(f^*(z_0, w_n), x)$ in einen akzeptierenden Zustand von A und daher in einen nicht akzeptierenden Zustand in A^c.

- Wir betrachten $w \notin L(A)$:

  Induktionsanfang: $|w| = 0$: D.h. $w = \varepsilon$. Da $w \notin L(A)$ heisst das, q_0 ist kein akzeptierender Zustand in A. Nach Konstruktion aus Teilaufgabe a) heisst das auch, dass q_0 akzeptierender Zustand in A^c ist. $\surd$

  Induktionsvoraussetzung:
  Für beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}_0$ mit $|w_n| = n$ gilt: $w_n \notin L(A) \wedge w_n \in L(A^c)$.

  Induktionsschluss: Sei $w = w_n x$, mit $x \in X$. Da wir $w \notin L(A)$ betrachten, führt $f^*(z_0, w) = f^*(z_0, w_n x) = f(f^*(z_0, w_n), x)$ in einen nicht-akzeptierenden Zustand von A und daher in einen akzeptierenden Zustand in A^c.