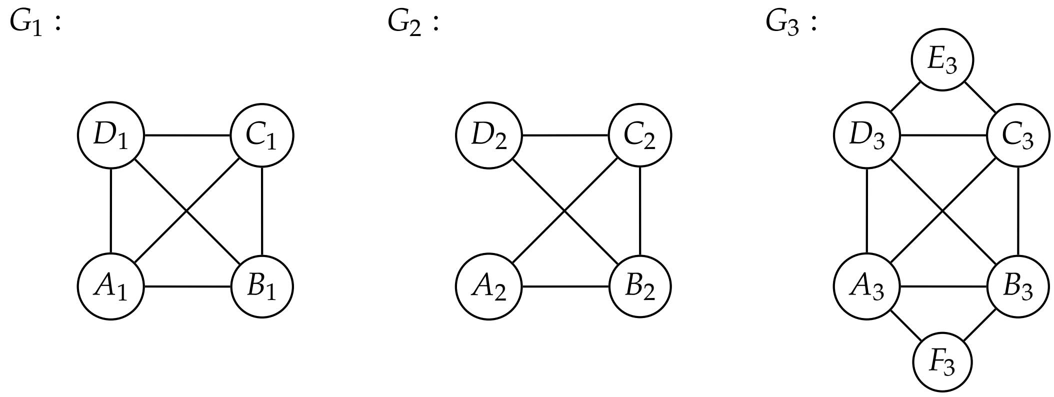
Grundbegriffe der Informatik
Musterlösung zu Aufgabenblatt 7

Aufgabe 7.1 (3+2 Punkte)
An dieser Stelle betrachten wir noch einmal ein Problem ähnlich dem Brückenproblem aus der Vorlesung. Es sei $G = (V, E)$ ein Graph. Es geht um die Frage, ob es in G einen (womöglich geschlossenen) Weg gibt, der jede Kante von G genau einmal enthält.

a) Geben Sie für jeden der folgenden Graphen an, ob es einen Weg gibt, der jede Kante genau einmal enthält *und* ob es einen Zyklus gibt, der jede Kante genau einmal enthält:



b) Geben Sie eine einfache Bedingung an, die notwendig und hinreichend dafür ist, dass ein Graph einen Zyklus enthält, in dem jede Kante genau einmal vorkommt.

Lösung 7.1

a) G_1 enthält keinen solchen Pfad und keinen solchen Zyklus.
G_2 enthält einen solchen Pfad $(C_2, B_2 A_2, C_2, D_2, B_2)$ *(war nicht gefordert anzugeben)* und keinen solchen Zyklus.
G_3 enthält einen solchen Pfad $(A_3, B_3, C_3, D_3, A_3, F_3, B_3, D_3, E_3, C_3, A_3)$ *(war nicht gefordert anzugeben)* und einen solchen Zyklus (der mit dem angegebenen Pfad identisch ist).

b) Ein gerichteter Graph enthält so einen Zyklus, wenn für jeden Knoten $v \in V$ gilt $d^+(v) = d^-(v)$.
Ein ungerichteter Graph enthält so einen Zyklus, wenn für jeden Knoten $v \in V$ gilt $d(v) \bmod 2 = 0$.

Punkteverteilung: Volle Punktzahl, wenn nur einer der Fälle betrachtet wurde.

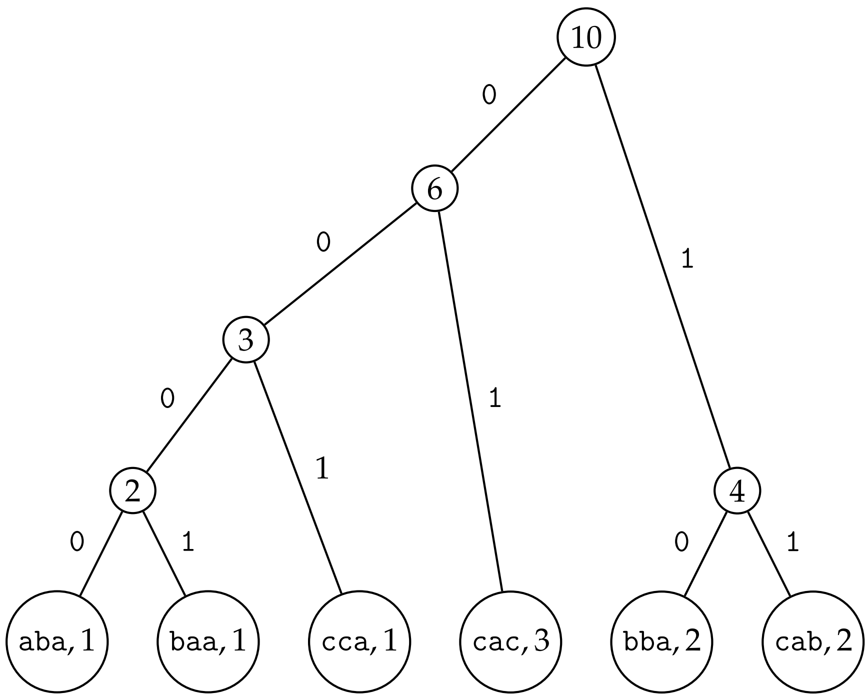
Aufgabe 7.2 (2+3+1 Punkte)
Gegeben sei das Wort $w = \texttt{caccacababaabbacabcabccabbacac}$ über $\{\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}\}$.

a) Zerlegen Sie w von links nach rechts in Dreierblöcke und geben Sie für jeden Block an, wie häufig er in w vorkommt.
b) Konstruieren Sie den für den Huffman-Code benötigten Baum.
c) Geben Sie die Codierung von w für den Huffman-Code an, den Sie in Teilaufgabe b) konstruiert haben.

Lösung 7.2

a) $w = \texttt{cac|cac|aba|baa|bba|cab|cab|cca|bba|cac}$. Die Häufigkeiten sind:

cac	aba	baa	bba	cab	cca
3	1	1	2	2	1



b)

c) Die Codierung ist: 01010000000110111110011001

Hinweis: Der Baum, und damit die Codierung, ist nicht eindeutig!

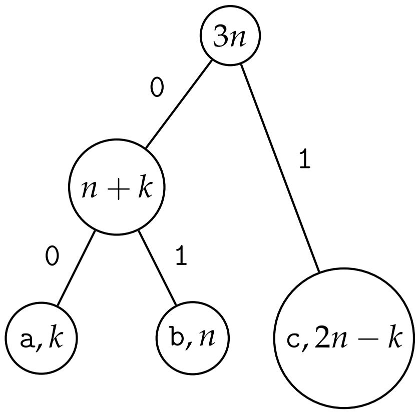
Aufgabe 7.3 (2+2 Punkte)
Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $1 \leq k \leq n$.
In einem Wort $w \in \{\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}\}^*$ der Länge $3n$ komme k mal das Zeichen a, n mal das Zeichen b und $2n - k$ mal das Zeichen c vor.

a) Geben Sie den für die Huffman-Codierung benötigten Baum an.

b) Geben Sie (in Abhängigkeit von k und n) die Länge des zu w gehörenden Huffman-Codes an.

Lösung 7.3

a)



b) Jedes a und jedes b wird durch zwei Zeichen codiert, und jedes c wird durch ein Zeichen codiert. Damit erhält man insgesamt $2k + 2n + 2n - k = 4n + k$ Zeichen in der Codierung.

Aufgabe 7.4 (5 Punkte)
Sei $T_1 = (V_1, E_1)$ ein gerichteter Baum mit Wurzel r_1, $T_2 = (V_2, E_2)$ ein gerichteter Baum mit Wurzel r_2, und es gelte $V_1 \cap V_2 = \{\}$.
Sei $r \notin V_1 \cup V_2$.
Zeigen Sie: $T_1 \circ_r T_2 = (V_1 \cup V_2 \cup \{r\}, E_1 \cup E_2 \cup \{(r, r_1), (r, r_2)\})$ ist ein gerichteter Baum mit Wurzel r.

Lösung 7.4

Wir zeigen zuerst, dass es von r zu jedem Knoten in $V_1 \cup V_2 \cup \{r\}$ einen Pfad gibt:
Es gibt offensichtlich einen Pfad (der Länge 0) von r nach r.
Sei $\mathrm{i} \in \{1,2\}$ und $v \in V_\mathrm{i}$. Dann gibt es nach Definition einen Pfad von r_i nach v über Kanten aus E_i. Da es auch eine Kante von r nach r_i gibt, gibt es somit auch einen Pfad von r nach v über r_i.
Somit gibt es für alle Knoten $v \in V_1 \cup V_2 \cup \{r\}$ einen Pfad von r nach v.
Wir zeigen nun noch, dass es für keinen Knoten $v \in V_1 \cup V_2 \cup \{r\}$ keine zwei verschiedenen Pfade von r nach v gibt.
Sei $\mathrm{i} \in \{1,2\}$. Da jede Kante (x, y) in $E_1 \cup E_2 \cup \{(r, r_1), (r, r_2)\}$ mit $x \in V_\mathrm{i}$ auch $y \in V_\mathrm{i}$ erfüllt, sind von r_i nur Knoten in V_i erreichbar.
Wenn es zwei Pfade von r nach v gibt, muss einer der Pfade eine Länge größer als 0 haben; der zweite Knoten in diesem Pfad sei r_j mit $j \in \{1,2\}$, und v liegt somit in V_j, da von r_j ausgehend nur Knoten in V_j erreichbar sind.

Der zweite Knoten des zweiten Pfades muss somit ebenfalls r_j sein, da von dem anderen Knoten r_{3-j} der Knoten v nicht erreichbar sind.
Da alle Kanten zwischen Knoten aus V_j in E_j liegen, folgt, dass es dann auch zwei Pfade von r_j nach v geben muss; dies ist ein Widerspruch dazu, dass T_j ein Baum ist.
Somit kann es von r zu jedem Knoten $v \in V_1 \cup V_2 \cup \{r\}$ nur einen Pfad geben, und $T_1 \circ_r T_2$ ist ein Baum.