Grundbegriffe der Informatik
Musterlösung zu Aufgabenblatt 5

Aufgabe 5.1 (2+2 Punkte)
Gegeben sei folgende Grammatik $G = (N, T, S, P)$:

$$\begin{aligned}
N &= \{\langle \mathit{Formel} \rangle, \langle \mathit{Atom} \rangle, \langle \mathit{Negation} \rangle, \langle \mathit{KonDis} \rangle, \langle \mathit{BinOp} \rangle\} \\
T &= \{\mathtt{x}, \neg, \wedge, \vee, \mathtt{(}, \mathtt{)}\} \\
S &= \langle \mathit{Formel} \rangle \\
P &= \{\langle \mathit{Formel} \rangle \rightarrow \langle \mathit{Atom} \rangle \mid \langle \mathit{Negation} \rangle \mid \langle \mathit{KonDis} \rangle, \\
&\quad \langle \mathit{Atom} \rangle \rightarrow \langle \mathit{Atom} \rangle \mid \mathtt{x}, \\
&\quad \langle \mathit{Negation} \rangle \rightarrow \neg \langle \mathit{Formel} \rangle, \\
&\quad \langle \mathit{KonDis} \rangle \rightarrow \mathtt{(}\ \langle \mathit{Formel} \rangle\ \langle \mathit{BinOp} \rangle\ \langle \mathit{Formel} \rangle\ \mathtt{)}, \\
&\quad \langle \mathit{BinOp} \rangle \rightarrow \vee \mid \wedge \\
&\}.
\end{aligned}$$

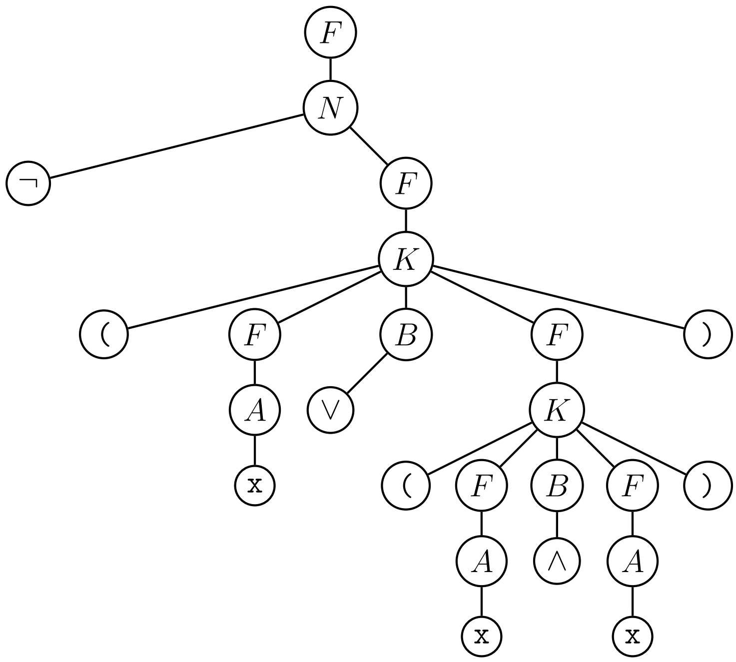
a) Geben Sie ein Wort der von G erzeugten Sprache $L(G)$ an, in dem jedes Terminalsymbol mindestens einmal und höchstens dreimal vorkommt.

b) Stellen Sie zu ihrem Wort einen Ableitungsbaum auf. Sie können dabei die Nichtterminalsymbole durch ihre Anfangsbuchstaben abkürzen.

Lösung 5.1

a) $\neg\mathtt{(x} \vee \mathtt{(x} \wedge \mathtt{x))}$

b)



Aufgabe 5.2 (2+3+2 Punkte)
Gegeben sei folgende Grammatik: $G = 9\{S, E, M\}, \{\ \texttt{a}, \texttt{-}, \texttt{(}, \texttt{)}, \texttt{=}\ \}, S, P)$ mit der Produktionenmenge

$$\begin{aligned} P = \{ \quad S &\to E\texttt{)}\ , \\ E &\to \texttt{a}E\texttt{a} \mid M\texttt{=-(}M\ , \\ M &\to \texttt{a}M\texttt{a} \mid \texttt{-}\ \}. \end{aligned}$$

a) Geben Sie für das Wort $\texttt{a}^4\texttt{-a}^3\texttt{=-(a}^2\texttt{-a}^3\texttt{)}$ (also für `aaaa-aaa=-(aa-aaa)`) eine Ableitung oder den Ableitungsbaum an.

b) Es gelte $m - n = l - k = 2$.

Erklären Sie, wie sich das Wort $\texttt{a}^m\texttt{-a}^n\texttt{=-(a}^k\texttt{-a}^l\texttt{)}$ aus S ableiten lässt.

c) Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung für m, n, k, l an, so dass gilt: $\texttt{a}^m\texttt{-a}^n\texttt{=-(a}^k\texttt{-a}^l\texttt{)} \in L(G)$.

Lösung 5.2

a)

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow E\texttt{)} \\ &\Rightarrow \texttt{a}E\texttt{a)} \\ &\Rightarrow \texttt{a}M\texttt{=-(}M\texttt{a)} \\ &\Rightarrow \texttt{aa}M\texttt{a=-(}M\texttt{a)} \Rightarrow \texttt{aaa}M\texttt{aa=-(}M\texttt{a)} \Rightarrow \texttt{aaaa}M\texttt{aaa=-(}M\texttt{a)} \\ &\Rightarrow \texttt{aaaa}M\texttt{aaa=-(a}M\texttt{aa)} \Rightarrow \texttt{aaaa}M\texttt{aaa=-(aa}M\texttt{aaa)} \\ &\Rightarrow \texttt{aaaa-aaa=-(aa}M\texttt{aaa)} \Rightarrow \texttt{aaaa-aaa=-(aa-aaa)} \end{aligned}$$

b)
- S durch $E\texttt{)}$ ersetzen.
- 2-mal E durch aEa ersetzen.
- E durch $M\texttt{=-(}M$ ersetzen.
- das linke M n-mal durch $\texttt{a}M\texttt{a}$ ersetzen,
- das rechte M k-mal durch $\texttt{a}M\texttt{a}$ ersetzen.
- beide M durch `-` ersetzen.

c) $m, n, k, l \in \mathbb{N}_0 \wedge m - n = l - k \geq 0$

Aufgabe 5.3 (4+3+2 Punkte)
Gegeben sei folgende Sprache:

$$\begin{aligned} L_0 &= \{\varepsilon\}, \\ \forall i \in \mathbb{N}_0 : L_{i+1} &= L_i \cup \{\texttt{(}\} \cdot L_i \cdot L_i \cdot \{\texttt{)}\} \;. \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie: $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \forall w \in L_n : w$ ist ein wohlgeformter Klammerausdruck.

b) Geben Sie einen wohlgeformten Klammerausdruck der Länge 6 an, der nicht in $L = \bigcup_{i=0}^{\infty} L_i$ liegt. Begründen Sie, warum Ihr gewähltes Wort nicht in L liegt.

c) Welche Länge hat das längste Wort in L_n?

Lösung 5.3

a) **Induktionsanfang:** $n = 0$**:** $L_0 = \{\varepsilon\}$. Dies ist nach unserer Definition ein wohlgeformter Klammerausdruck.$\surd$

Induktionsvoraussetzung: Für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}_0$ gelte

Alle Wörter $w \in L_n$ sind wohlgeformte Klammerausdrücke.

Induktionsschluss: Wir zeigen, dass dann auch alle Wörter $w \in L_{n+1}$wohlgeformte Klammerausdrücke sind.

Sei w ein beliebiges Wort $\in L_{n+1}$. Nach (der rekursiven) Definition ist $w \in L_n$ oder $\exists w_1, w_2 \in L_n : w = \texttt{(}w_1 \cdot w_2\texttt{)}$. Im ersten Fall ist nach IV w ein wohlgeformter Klammerausdruck. Per Definition gilt:

- Wenn w_1, w_2 wohlgeformte Klammerausdrücke sind, dann auch $w_1{\cdot}w_2$.
- Wenn $w_1{\cdot}w_2$ wohlgeformter Klammerausdruck ist, dann auch $\texttt{(}w_1{\cdot}w_2\texttt{)}$.

Folglich ist auch $w = \texttt{(}w_1 \cdot w_2\texttt{)}$ ein wohlgeformter Klammerausdruck. $\square$.

Punkteverteilung: IA und IV geben jeweils einen Punkt, der IS gibt 2 Punkte.

b) `()()()` liegt nicht in L.

$L_0 = \{\varepsilon\}$, also liegt `()()()` nicht in L_0.

Nach rekursiver Definition der Sprache gilt: $L_{n+1} = L_n \cup \{\texttt{(}\} \cdot L_n \cdot L_n \cdot \{\texttt{)}\}$. Wenn `()()()` also in der Sprache $L_{n+1} \setminus L_n$ enthalten wäre, müsste auch `)()(` in $L_n \cdot L_n$ enthalten sein. Da in L_n nur wohlgeformte Klammerausdrücke liegen (siehe Teilaufgabe a)), liegen auch in $L_n \cdot L_n$ nur wohlgeformte Klammerausdrücke. `)()(` ist kein wohlgeformter Klammerausdruck, deswegen kann `()()()` in keinem L_n und folglich auch nicht in L liegen.

Punkteverteilung: Einen Punkt für einen richtigen Ausdruck, 2 Punkte für die Begründung.

c) Das längste Wort in L_n ist $2^{n+1} - 2$ Zeichen lang.

Erläuterung: Wer wissen will, warum das so ist: Ein längstes Wort w_{n+1} in L_{n+1} erhält man, indem man ein längstes Wort w_n aus L_n nimmt, und daraus $\texttt{(}w_n w_n\texttt{)}$ konstruiert. Also ist $|w_{n+1}| = 2 + 2|w_n|$. Man rechnet: $2 + 2(2^{n+1} - 2) = 2^{(n+1)+1} - 2$ (Induktion ...).