Grundbegriffe der Informatik
Musterlösung zu Aufgabenblatt 2

Aufgabe 2.1 (5 Punkte)
Welche der folgenden Aussagen ist die Negation der Aussage:
"Für alle Mensaspeisen findet sich jemand, dem sie schmeckt."?
Stellen Sie für jede der Aussagen zudem eine äquivalente prädikatenlogische Formel auf. M sei dabei die Menge der Mensaspeisen, E die Menge der Esser und die Relation $\heartsuit \subseteq E \times M$ gebe an, welchem Esser welche Speisen schmecken.

a) Es gibt keine Mensaspeisen, die allen nicht schmecken.

b) Allen schmecken alle Mensaspeisen.

c) Es gibt eine Mensaspeise, die allen nicht schmeckt.

d) Es gibt einen, dem alle Mensaspeisen nicht schmecken.

e) Es gibt keinen, dem alle Mensaspeisen schmecken.

Lösung 2.1
Die Aussage "Für alle Mensaspeisen findet sich jemand, dem es schmeckt." lässt sich prädikatenlogisch folgendermaßen schreiben: $\forall m \in M : \exists e \in E : e\heartsuit m$
Die Negation stellt sich folgendermaßen dar:

$$\begin{array}{rl} & \neg(\forall m \in M : \exists e \in E : e\heartsuit m) \\ \text{das ist äquivalent zu} & \exists m \in M : \neg\exists e \in E : e\heartsuit m \\ \text{das ist äquivalent zu} & \exists m \in M : \forall e \in E : \neg(e\heartsuit m) \end{array}$$

Dies entspricht der Aussage c).

a) $\neg\exists m \in M : \forall e \in E : \neg(e\heartsuit m)$
(Diese Aussage ist im übrigen äquivalent zur ursprünglichen Aussage.)

b) $\forall m \in M : \forall e \in E : e\heartsuit m$

c) $\exists m \in M : \forall e \in E : \neg(e\heartsuit m)$

d) $\exists e \in E : \forall m \in M : \neg(e\heartsuit m)$

e) $\neg\exists e \in E : \forall m \in M : e\heartsuit m$

Aufgabe 2.2 (1+1+4 Punkte)
Im folgenden sei $\mathbb{N}_+ = \mathbb{N}_0 \setminus \{0\}$.
Alice und Bob feiern ihren Hochzeitstag. Auf ihrer Party befinden sich n $\in \mathbb{N}_+$ Paare. Dabei begrüßen sich alle Paare mit Ausnahme des eigenen Partners.

a) Geben Sie die Anzahl der Begrüßungen x_i für $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ Paare an.

b) Stellen Sie für x_n eine geschlossene Formel (d.h. einen arithmetischen Ausdruck, in dem nur Zahlen, n und die Grundrechenarten vorkommen) auf.

c) Beweisen Sie Ihre Aussage aus Teilaufgabe b) durch vollständige Induktion.

Lösung 2.2
Vorbemerkung: Zur Aufgabenstellung gab es die Frage, was genau *eine* Begrüßung sei; insbesondere: Wenn sich zwei die Hand geben, ist das eine Begrüßung oder sind es zwei? Für die folgende Lösung wurde angenommen: das ist eine Begrüßung. Wenn jemand überall das Doppelte raus hat, sollte es dafür auch volle Punktzahl geben.

a)
- $x_1 = 0$
- $x_2 = 4$
- $x_3 = 12$
- $x_4 = 24$
- $x_5 = 40$

b) $x_n = 2 \cdot n \cdot (n-1) = 2 \cdot (n^2 - n)$.

c) **Induktionsanfang:** $n = 1$**:** Nach Definition gilt $x_1 = 0 = 2 \cdot 0 \cdot (0-1)$. ✓

Induktionsvoraussetzung:
Für ein festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}_+$ gelte $x_n = 2 \cdot n \cdot (n-1)$.

Induktionsschluss: Zu zeigen: es gilt $x_{n+1} = 2\cdot(n+1)\cdot((n+1)-1) = 2(n+1)n$
Jedes Paar, das neu hinzukommt, muss die n sich im Raum befindenden Paare begrüßen. n zu begrüßende Paare bedeutet $2n$ Begrüßungen (ein Paar besteht aus 2 Partnern) pro neu hinzukommendem Partner, also insgesamt $4n$ Begrüßungen. Formal heisst das $x_{n+1} = x_n + 4 \cdot n$.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &\overset{\text{Def.}}{=} x_n + 4n \\ &\overset{\text{Ind.vor.}}{=} 2n \cdot (n-1) + 4n = 2n^2 - 2n + 4n \\ &= 2n^2 + 2n = 2 \cdot (n+1) \cdot n. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 2.3 (1+4 Punkte)
Gegeben sei folgende induktiv definierte Folge von Zahlen:

$$x_0 = 0$$
$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : x_{n+1} = x_n + (n+1)(n+2)$$

a) Berechnen Sie x_1, x_2, x_3, x_4.

b) Beweisen Sie durch vollständige Induktion: $x_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Lösung 2.3

a) Im folgenden sind zur Erläuterung einige Rechnungen angedeutet. Für die volle Punktzahl genügen die richtigen Ergebnisse.

- $x_1 = x_{0+1} = x_0 + (0+1)\cdot(0+2) = 0 + (1\cdot 2) = 2$
- $x_2 = x_{1+1} = x_1 + (1+1)\cdot(1+2) = 2 + (2\cdot 3) = 8$
- $x_3 = x_{2+1} = 8 + 3\cdot 4 = 20$
- $x_4 = x_{3+1} = 20 + 4\cdot 5 = 40$

b) **Induktionsanfang:** $n = 0$**:** Nach Definition gilt $x_0 = 0 = \frac{0\cdot(0+1)(0+2)}{3}$. $\surd$

Induktionsvoraussetzung:
Für ein festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$ gelte $x_n = \frac{n\cdot(n+1)(n+2)}{3}$.

Induktionsschluss: Wir zeigen, dass dann auch

$$x_{n+1} = \frac{(n+1)\cdot(n+1+1)(n+1+2)}{3} = \frac{(n+1)\cdot(n+2)(n+3)}{3}$$

gelten muss.
Nach Definition gilt $x_{n+1} = x_n + (n+1)\cdot(n+2)$.
Nach Induktionsvoraussetzung gilt $x_n = \frac{n\cdot(n+1)(n+2)}{3}$, also

$$\begin{aligned} x_{n+1} &\overset{\text{Def.}}{=} x_n + (n+1)\cdot(n+2) \overset{\text{Ind.vor.}}{=} \frac{n\cdot(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)\cdot(n+2) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)}{3} \\ &= \frac{(n+3)[(n+1)(n+2)]}{3} = \frac{(n+1)\cdot(n+2)(n+3)}{3}. \end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 2.4 (2+1+1 Punkte)
Es sei A ein Alphabet und w ein Wort aus A^*.

a) Definieren Sie formal, was ein Präfix von w ist.

b) Definieren Sie formal, was ein Suffix von w ist.

c) Wie viele Präfixe hat ein Wort der Länge n?

Lösung 2.4

a) p ist Präfix von $w \Leftrightarrow \exists w' \in A^* : p \cdot w' = w$.

b) s ist Suffix von $w \Leftrightarrow \exists w' \in A^* : w' \cdot s = w$.

c) Ein Wort der Länge n hat $(n+1)$ Präfixe

   Erläuterung: das sind die Präfixe der Längen 0, 1, $\dots$, n,
   z. B. hat `abc` die Präfixe ε, `a`, `ab` und `abc`.