Grundbegriffe der Informatik
Musterlösung zu Aufgabenblatt 12

Aufgabe 12.1 (4 Punkte)
Die Sprache $L \subseteq \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$ sei wie folgt definiert:

- $\varepsilon \in L$
- $\forall w_1, w_2 \in L : \mathtt{a}w_1\mathtt{b}w_2 \in L \wedge \mathtt{b}w_1\mathtt{a}w_2 \in L$
- Keine anderen Wörter liegen in L.

Zeigen Sie durch strukturelle Induktion, dass jedes Wort $w \in L$ ebenso viele $\mathtt{a}$ wie $\mathtt{b}$ enthält. (Schreibweise für Anzahl der $\mathtt{a}$ in $w : N_\mathtt{a}(w)$)

Lösung 12.1

Induktionsanfang: $w = \varepsilon$: $N_\mathtt{a}(w) = N_\mathtt{b}(w) = 0.\checkmark$

Induktionsvoraussetzung: Für beliebige aber feste $w_1, w_2 \in L$ gelte $N_\mathtt{a}(w_1) = N_\mathtt{b}(w_1)$ und $N_\mathtt{a}(w_2) = N_\mathtt{b}(w_2)$

Induktionsschluss: Wir zeigen, dass auch für $w \in \{\mathtt{a}w_1\mathtt{b}w_2, \mathtt{b}w_1\mathtt{a}w_2\}$ gilt: $N_\mathtt{a}(w) = N_\mathtt{b}(w)$

- $w = \mathtt{a}w_1\mathtt{b}w_2 \Rightarrow N_\mathtt{a}(w) = 1 + N_\mathtt{a}(w_1) + N_\mathtt{a}(w_2) \overset{IV}{=} 1 + N_\mathtt{b}(w_1) + N_\mathtt{b}(w_2) = N_\mathtt{b}(w).\checkmark$
- $w = \mathtt{b}w_1\mathtt{a}w_2 \Rightarrow N_\mathtt{a}(w) = N_\mathtt{a}(w_1) + 1 + N_\mathtt{a}(w_2) \overset{IV}{=} N_\mathtt{b}(w_1) + 1 + N_\mathtt{b}(w_2) = N_\mathtt{b}(w).\checkmark$

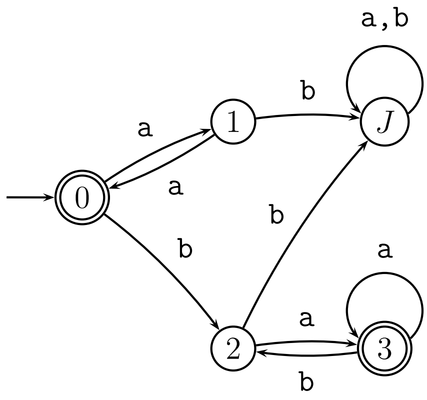
$\square$.

Aufgabe 12.2 (3+1+2 Punkte)
Gegeben sei die rechtslineare Grammatik $G = (\{S\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, S, P)$ mit
$P = \{S \to \mathtt{baa}S \mid \mathtt{ba}S \mid \mathtt{aa}S \mid \epsilon\}$

a) Geben Sie einen endlichen Akzeptor A an, so dass $L(A) = L(G)$ gilt.
b) Geben Sie einen regulären Ausdruck R an, so dass $\langle R \rangle = L(G)$ gilt.
c) Geben Sie einen regulären Ausdruck R an, der nicht das Zeichen | enthält, und für den $\langle R \rangle = L(G)$ gilt.

Lösung 12.2

a)



b) `(baa|ba|aa)*`

c) `(aa)*(baa*)*`

Aufgabe 12.3 (2+1+2+1 Punkte)
Die Turingmaschine T mit Anfangszustand S_0 und Eingabealphabet $\{A, C, D\}$ sei gegeben durch

	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A	$(A, S_1, 1)$	$(A, S_1, 1)$	$(A, S_3, 1)$	$(A, S_1, 1)$	$(D, S_5, -1)$	$-$
C	$(C, S_0, 1)$	$(C, S_0, 1)$	$(C, S_0, 1)$	$(C, S_4, -1)$	$-$	$-$
D	$(D, S_0, 1)$	$(D, S_2, 1)$	$(D, S_0, 1)$	$(D, S_2, 1)$	$-$	$(C, S_0, 1)$
$\square$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$

a) Geben Sie ein kürzestes Eingabewort w an, so dass T bei Eingabe von w irgendwann in den Zustand S_4 kommt.

b) Welches Wort steht am Ende der Berechnung auf dem Band, wenn die Eingabe das Wort w aus Teilaufgabe a) ist?

c) Was macht die Turingmaschine allgemein mit einem Eingabewort w?

d) Gibt es einen Mealy-Automaten $A = (Z, z_0, \{A, C, D\}, f, Y, g)$, so dass für jedes $w \in \{A, C, D\}^*$ gilt: $g^{**}(z_0, w)$ ist das Wort, das bei Eingabe von w am Ende der Berechnung von T auf dem Band steht.

Lösung 12.3

1. $ADAC$
2. $ACDC$
3. Die Turingmaschine ersetzt jedes Vorkommen von $ADAC$ in w durch $ACDC$.
4. Nein.

   Man könnte zwar einen Mealy-Automaten bauen, der jedes Vorkommen von $ADAC$ mit $ACDC$ ersetzt, jedoch wäre die Ausgabe bei einem Präfix von ADA das leere Wort.

Aufgabe 12.4 (4 Punkte)
Geben Sie eine Turingmaschine an, die bei Eingabe eines Wortes $w \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^+$ das Wort $w_1 = \mathtt{x}w$ auf dem Band produziert. Dabei soll das $\mathtt{x}$ an die Stelle des ersten Symbols von w geschrieben werden und jedes Symbol von w um ein Feld nach rechts verschoben werden. Ihre Turingmaschine darf maximal 6 Zustände haben. Größere Maschinen werden nicht korrigiert.

Lösung 12.4
S ist der Startzustand der Turingmaschine.

	S	S_0	S_1	F
0	$(\mathtt{x}, S_0, 1)$	$(\mathtt{0}, S_0, 1)$	$(\mathtt{1}, S_0, 1)$	-
1	$(\mathtt{x}, S_1, 1)$	$(\mathtt{0}, S_1, 1)$	$(\mathtt{1}, S_1, 1)$	-
$\square$	-	$(\mathtt{0}, F, 0)$	$(\mathtt{1}, F, 0)$	-
x	-	-	-	-

Hinweis: Die Turingmaschine kann natürlich auch anders dargestellt werden.