Lösungen zu den Aufgaben von Anfang August

Aufgabe 24

Die Wahrheitswerte von $A \lor \neg A \Rightarrow B$ und B sind immer gleich:
Der Wahrheitswert von $A \lor \neg A$ ist immer *wahr*, da immer entweder A oder $\neg A$ den Wahrheitswert *wahr* hat.
Betrachtet man die Tabelle für die Wahrheitswerte von $C \Rightarrow B$, stellt man fest, dass der Wahrheitswert immer gleich dem Wahrheitswert von B ist, falls der Wahrheitswert von C *wahr* ist:

C	B	$C \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Damit ist die Behauptung gezeigt.
Der Wahrheitswerte von $A \land \neg A \Rightarrow B$ ist immer *wahr*:
Der Wahrheitswert von $A \land \neg A$ ist immer *falsch*, da immer entweder A oder $\neg A$ den Wahrheitswert *falsch* hat.
Betrachtet man die Tabelle für die Wahrheitswerte von $C \Rightarrow B$, stellt man fest, dass der Wahrheitswert immer wahr ist, falls der Wahrheitswert von C *falsch* ist:

C	B	$C \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Damit ist die Behauptung gezeigt.

Aufgabe 25

Die Funktion $F : A^* \to A^*$ wird rekursiv definiert durch:
$F(\epsilon) = \epsilon$
$\forall w \in A^* x \in A : F(wx) = F(w)f(x)$.
Äquivalent zur zweiten Zeile:
$\forall w \in A^* x \in A : F(xw) = f(x)F(w)$.

Aufgabe 26

a) $x_8 = 2, x_9 = 3, x_{10} = 4, x_{11} = 6, x_{12} = 9, x_{13} = 13.$

b) Vergleichswerte: $2, 3, 4, 6, 8, 12$

Die Werte von x_8 bis x_{13} sind jeweils mindestens so groß wie die Vergleichswerte. Dies kann zur Vermutung führen:

Für $n \in \mathbb{N}^+$ gilt: $x_{2n+6} \geq 2^n$ und $x_{2n+7} \geq 2^n + 2^{n-1}$.

c) Nein.

d) Wir zeigen zuerst, dass für alle $n \in \mathbb{N}^+$ gilt: $x_{2n+6} \geq 2^n$ und $x_{2n+7} \geq 2^n + 2^{n-1}$ und $x_{2n+8} \geq 2^{n+1}$.

Induktionsanfang: $i = 1$:

$x_{2\cdot 1+6} = x_8 = 2 \geq 2^1$
$x_{2\cdot 1+7} = x_9 = 3 \geq 2^1 + 2^0$
$x_{2\cdot 1+8} = x_{10} = 4 \geq 2^{1+1}$

Induktionsannahme: Die Behauptung gilt für ein festes $n \in \mathbb{N}^+$.

Induktionsschritt: Dann gilt die Behauptung auch für $n + 1$:

$x_{2\cdot(n+1)+6} = x_{2n+8} \geq 2^{n+1}$ nach Induktionsvoraussetzung
$x_{2\cdot(n+1)+7} = x_{2n+9} = x_{2n+8} + x_{2n+6} \geq 2^{n+1} + 2^n = 2^{n+1} + 2^{n+1-1}$ nach Induktionsvoraussetzung
$x_{2\cdot(n+1)+8} = x_{2n+10} = x_{2n+9} + x_{2n+7} = x_{2n+8} + x_{2n+7} + x_{2n+6} \geq 2^{n+1} + (2^n + 2^{n-1}) + 2^n$ nach Induktionsvoraussetzung.
$2^{n+1} + (2^n + 2^{n-1}) + 2^n \geq 2^{n+1} + 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} = 2^{n+1+1}$

Damit ist die Behauptung gezeigt.

Insbesondere gilt für gerade $n \geq 8$: $x_n \geq 2^{\frac{n-6}{2}}$.

Angenommen, es gibt ein $k \in \mathbb{N}_0$, so dass gilt $x(n) \in O(n^k)$. Dann muss es ein $c > 0$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ geben, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $cn^k \geq x(n)$.

Insbesondere gilt dann für alle geraden $n \geq \max\{8, n_0\} : cn^k \geq 2^{\frac{n-6}{2}}$

Quadrieren auf beiden Seiten führt zu $c^2 n^{2k} \geq 2^{n-6}$.

Multiplikation von 2^6 auf beiden Seiten führt zu $(2^6 c^2) n^{2k} \geq 2^n$.

Wir wählen nun $k_0 = 2k + 1$ und erhalten für gerade $n \geq \max\{8, n_0, 2^6 c^2\}$:

$n^{k_0} = n^{2k} \cdot n \geq (2^6 c^2) n^{2k} \geq 2^n$.

Insbesondere gilt für $k_1 \geq k_0 : n^{k_1} \geq n^{k_0} \geq 2^n$, falls $n \geq \max\{8, n_0, 2^6 c^2\}$ gilt und n gerade ist. Wir können ein k_1 also auf jeden Fall so wählen, dass $k_1 \geq 5$ gilt und $n^{k_1} \geq 2^n$ für hinreichend große gerade n gilt.

Wir wählen $d \geq 1$ nun so, dass $n = 2^{dk_1} \geq \max\{8, n_0, 2^6 c^2\}$ gilt.

Dann gilt $2^{dk_1 \cdot k_1} = n^{k_1} \geq 2^{2^{dk_1}}$

Zieht man auf beiden Seiten den Zweierlogarithmus, erhält man:

$dk_1^2 \geq 2^d \cdot 2_1^k$. (I)

Wir zeigen durch vollständige Induktionen, dass für $d \geq 1$ gilt: $2^d > d$ und für $k_1 \geq 5$ gilt: $k_1^2 < 2k_1$.

$d < 2^d$:

Induktionsanfang: $d = 1$: $1 < 2^1 = 2$ stimmt.

Induktionsannahme: Für ein festes $d \geq 1$ gilt $d < 2^d$.

Induktionsschritt: $d \to d+1$: $2^{d+1} = 2^d + 2^d > d + 2^d$ nach Induktionsvoraussetzung.

$d + 2^d \geq d + 2 > d + 1$ für $d \geq 1$.

$k_1^2 < 2^{k_1}$:

Induktionsanfang: $k_1 = 5$: $5^2 = 25 < 32 = 2^5$ stimmt.

Induktionsannahme: Für ein festes $k_1 \geq 5$ gilt $k_1^2 < 2^{k_1}$.

Induktionsschritt: $k_1 \to k_1 + 1$:

$2^{k_1+1} = 2^{k_1} + 2^{k_1} > k_1^2 + k_1^2$ nach Induktionsvoraussetzung.

$k_1^2 + k_1^2 \geq k_1^2 + 5k_1 = k_1^2 + 4k_1 + k_1 \geq k_1^2 + 2k_1 + 1 = (k_1+1)^2$.

Somit gilt: $dk_1^2 < 2^d 2^{k_1}$

Dies ist ein Widerspruch zu (I), und somit kann es kein $k \in \mathbb{N}_0$ geben, für das gilt: $x(n) \in O(n^k)$.

Aufgabe 27

a) $L_1 = \{w \in \{a,b\}^*\} = \{a,b\}^*$.
   $L_2 = \{w \in \{a,b\}^*\} = \{a,b\}^*$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}_0 : L_n = \{a,b\}^*$.

Aufgabe 28

Die konkatenierten Wörter im Folgenden liegen jeweils in L.

a) `aaabbb` $\notin L^*$.

b) `bbaaa` $\notin L^*$.

c) $\texttt{aabaaaba} = \texttt{aaba} \cdot \texttt{aaba} \in L^*$.

d) $\texttt{baaaaba} = \texttt{ba} \cdot \texttt{aaaba} \in L^*$.

e) $\texttt{aababbbb} \in L \subseteq L^*$.

f) $\texttt{abababab} = \texttt{abab} \cdot \texttt{abab} = \texttt{aba} \cdot \texttt{ba} \cdot \texttt{bab} \in L^*$.

Aufgabe 29

a) $G = (\{S\}, \{\texttt{a}, \texttt{b}\}, S, \{S \rightarrow \texttt{a}S\texttt{b} \mid S\texttt{b} \mid \texttt{b}\})$

b) $G = (\{S\}, \{\texttt{a}, \texttt{b}\}, S, \{S \rightarrow \texttt{a}S\})$

Hinweis: Wichtig ist, dass die Grammatik die leere Menge erzeugt; dies kann auf sehr viele unterschiedliche, beliebig komplizierte Arten gemacht werden!

c) $G = (\{S, S_1, S_2\}, \{\texttt{a}, \texttt{b}\}, S, \{S \rightarrow \texttt{a}S\texttt{b} \mid S_1 \mid S_2,$
$S_1 \rightarrow \texttt{a}S_1 \mid \texttt{a},$
$S_2 \rightarrow S_2\texttt{b} \mid \texttt{b}\})$

d) $G = (\{S, S_1, S_2\}, \{\texttt{a}, \texttt{b}\}, S, \{S \rightarrow S_1 S_2,$
$S_1 \rightarrow \texttt{a}S_1\texttt{b} \mid S_1\texttt{b} \mid \texttt{b},$
$S_2 \rightarrow \texttt{a}S_2\texttt{b} \mid \texttt{a}S \mid \texttt{a}\})$

Aufgabe 30

a) $G = (\{S\}, \{\texttt{a}, \texttt{b}\}, S, \{S \rightarrow \texttt{a}S \mid \texttt{b}S \mid \epsilon\})$

Diese Grammatik erzeugt $\{\texttt{a}, \texttt{b}\}^*$, eine Menge, die für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ genau 2^n Wörter der Länge n enthält.

b) $G = (\{S\}, \{\texttt{a}, \texttt{b}\}, S, \{S \rightarrow \texttt{a}S \ \mid \epsilon\})$

Diese Grammatik erzeugt $\{\texttt{a}\}^*$, eine Menge, die für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ genau 1 Wort der Länge n enthält, nämlich a^n.

c) $G = (\{S\}, \{\texttt{a}, \texttt{b}\}, S, \{S \rightarrow \texttt{a}S \ \mid S\texttt{b} \mid \texttt{a}\})$

Diese Grammatik erzeugt $\{\texttt{a}^n\texttt{b}^m \mid n \geq 1, m \in \mathbb{N}_0\}$, eine Menge, die für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ genau n Wörter der Länge n enthält, nämlich die n Wörter der Form $\texttt{a}^k\texttt{b}^{n-k}$ mit $1 \leq k \leq n$.

Aufgabe 31

a) $\preceq$ ist reflexiv: Sei $w \in A^*$ beliebig. Dann gilt für $u = v = \epsilon : uwv = w$, und nach Definition folgt $w \preceq$, womit Reflexivität gezeigt ist.

b) $\preceq$ ist nicht symmetrisch: Sei $x \in A$. Dann gilt für $u = v = x : uxv = xxx$ und damit $x \preceq xxx$. Wäre $\preceq$ symmetrisch, müsste ebenfalls gelten $xxx \preceq x$.

   Angenommen, es gäbe $u', v' \in A^*$, so dass $u'xxxv' = x$ gilt. Betrachtet man die Längen der Wörter auf beiden seiten, erhält man:

   $|u'| + |v'| + 3 = |u'xxxv'| = |x| = 1$

   und damit $|u'| + |v'| = -2$, was nicht möglich ist.

   Somit kann $\preceq$ nicht symmetrisch sein.

c) $\preceq$ ist antisymmetrisch: Wir betrachten $w, w' \in A^*$ mit $w \preceq w'$ und $w' \preceq w$.

   Dann gibt es nach Definition $u, u', v, v' \in A^*$ mit $uwv = w'$ und $u'w'v' = w$.

   Es folgt $u'uwvv' = w$. Wir betrachten wieder die Längen der Wörter auf beiden Seiten und erhalten $|u'|+|u|+|w|+|v|+|v'| = |w|$ und damit $|u|+|u'|+|v|+|v'| = 0$, was bedeutet, dass $u = u' = v = v' = \epsilon$ gelten muss.

   Damit folgt $w = \epsilon w \epsilon = w'$ was die Antisymmetrie beweist.

d) $\preceq$ ist transitiv: Wir betrachten $w_1, w_2, w_3 \in A^*$ mit $w_1 \preceq w_2$ und $w_2 \preceq w_3$.

   Dann gilt: Es gibt $u, v, u', v' \in A^*$ mit $uw_1v = w_2$ und $u'w_2v' = w_3$.

   Es folgt $u'uw_1vv' = w_3$, und damit gilt nach Definition auch $w_1 \preceq w_3$, da $u'u, vv' \in A^*$ gilt.

Aufgabe 32

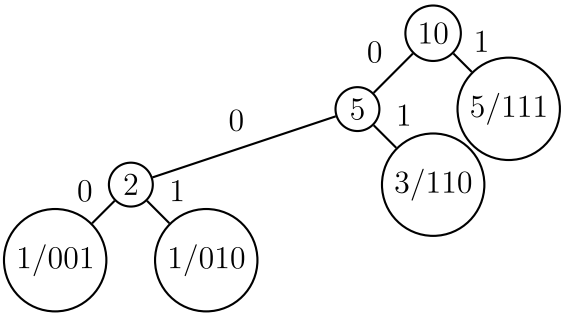
Eine Codierung ist eine injektive Abbildung von einer formalen Sprache L_A in eine formale Sprache L_B.
Eine Codierung $c : L_A \to L_A$heißt präfixfrei, falls gilt:
$\forall w_1, w_2 \in L_A : c(w_1)$ ist Präfix von $c(w_2) \iff w_1 = w_2$.

Aufgabe 33

a) Das Wort zerlegt in Dreierblöcke: 001 111 110 111 110 111 010 111 110 111

   Die Häufigkeiten:

001	111	110	010
1	5	3	1

b) 

c) Die Codierung lautet: 000 1 01 1 01 1 001 1 01 1

Aufgabe 34

a) Ein ungerichteter Baum, der genau n Kanten enthält, muss genau $n+1$ Knoten enthalten.

b) Ein gerichteter Baum, der genau n Kanten enthält, muss genau $n+1$ Knoten enthalten.

c) Wir betrachten einen gerichteten Baum $G = (V, E)$ und bestimmen als erstes den Eingangsgrad eines Knotens v, der nicht die Wurzel r ist:

   Da es einen Weg von r nach v gibt, muss v mindestens den Eingangsgrad 1 haben.

   Angenommen, es gibt zwei verschiedene Knoten u, w, so dass es eine Kante von u nach v und eine Kante von w nach v gibt.

   Nach Definition gibt es einen Weg von r nach u und einen Weg von r nach w, und damit mindestens zwei Wege von r nach v: Einen weg, der als letzten Knoten vor v den Knoten u enthält, und einen, der vor dem Knoten v den Knoten w enthält.

   Dies ist ein Widerspruch zur Definition, also muss jeder Knoten v außer der Wurzel den Eingangsgrad 1 haben.

   Es gilt: $n = |E| = |\{(x, y) \mid (x, y) \in E\}| = \sum_{y \in V} |\{(x, y) \mid (x, y) \in E\}| = \sum_{y \in V} |\{x \mid (x, y) \in E\}| = \sum_{y \in V} indeg(y) = 0 + \sum_{y \in V \setminus \{r\}} 1 = |V \setminus \{r\}|$

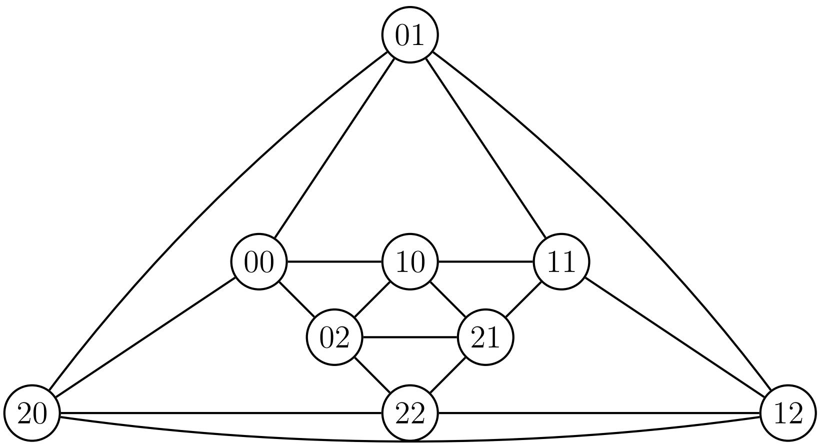
   Somit folgt $n = |V| - 1$ und damit $|V| = n + 1$.

Angenommen, es gäbe einen ungerichteten Baum mit genau n Kanten und $m \neq n+1$ Knoten. Indem man einen Knoten als Wurzel wählt, könnte man dann einen gerichteten Baum mit n Kanten und m Knoten konstruieren. Dies ist jedoch, wie oben gezeigt, nicht möglich.

Also muss die Aussage auch für ungerichtete Bäume stimmen.

Aufgabe 35

Wir betrachten den (überschaubareren) Graphen $G' = (V, E)$ mit $V = \{0, 1, 2\}^2$ und $E = \{\{xy, yz\} \mid x, y, z \in \{0, 1, 2\} undx \neq y\}$.
(Der in der Aufgabe angegebene Graph würde den Rahmen einer Klausuraufgabe bei weitem sprengen!)



a)

b) Ein solcher Weg ist $(00, 02, 22, 21, 11, 10, 02, 21, 10, 00, 01, 11, 12, 22, 20, 01, 12, 20, 00)$

c) $$\begin{pmatrix} 0&1&1&1&0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&1&1&1&0&0\\ 1&0&0&1&0&0&0&1&1\\ 1&0&1&0&1&0&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&0&1&0&1&0&1\\ 1&1&0&0&0&1&0&0&1\\ 0&0&1&1&1&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&0&1&1&1&0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 36

a) E ist eine Teilmenge von $V \times V$, kurz: $E \subseteq V \times V$.

b) Falls der Eintrag in Zeile i Spalte j 1 ist, liegt (i,j) in E; ist der Eintrag 0, liegt (i,j) nicht in E.

   Weitere Fälle gibt es nach Definition der Adjazenzmatrix nicht.

c) Wenn G schlingenfrei ist, befinden sich auf der Diagonalen von A nur Nullen.

d) Es gibt 2^{n^2-n} verschiedene schlingenfreie Graphen mit der Knotenmenge V:

   Jede Matrix über $\{0,1\}$, die nur Nullen auf der Diagonalen enthält, ist Adjazenzmatrix eines Graphen. Man hat also $n^2 - n$ Einträge, für die man jeweils einen Eintrag aus $\{0,1\}$ wählen kann ($n \cdot n$ Einträge, von denen n auf der Diagonalen liegen), was zur angegebenen Anzahl führt.

e) Die Wegematrix eines Graphen G enthält eine 1 in Zeile i Spalte j, falls es einen Weg von i nach j in G gibt, und eine 0 sonst.

f) Wenn G streng zusammenhängend ist, besteht die Wegematrix von G nur aus Einsen.

Aufgabe 37

a) Für alle $c \geq 4$.

b) Für alle $c > 1$.

c) Für alle $c \geq 2$.

Aufgabe 38

a) $R \circ R = R$

b) Wir zeigen, dass R in $R \circ R$ enthalten ist:

   Sei $(x,y) \in R$. Da R eine Äquivalenzrelation ist, gilt auch $(y,y) \in R$. Somit gilt für $z = y : (x,z) \in R \wedge (z,y) \in R$.

   Nach Definition von $R \circ R$ gilt somit auch $(x,y) \in R \circ R$.

Nun zeigen wir, dass $R \circ R$ in R liegt:

Sei $(x, y) \in R \circ R$. Dann gibt es nach Definition ein $z \in M$, so dass gilt: $(x, z) \in R \wedge (z, y) \in R$.

Da R als Äquivalenzrelation transitiv ist, folgt $(x, y) \in R$.

Damit gilt $R \subseteq R \circ R$ und $R \circ R \subseteq R \Rightarrow R = R \circ R$.

c) $R^* = R$.

d) Es gilt $R^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} R^i$

Wir zeigen per Induktion über i dass für $i \geq 1$ gilt: $R^i = R$.

Induktionsanfang: $i = 1$: $R^1 = R$ stimmt.

Induktionsannahme: Für ein festes $i \in \mathbb{N}^+$ gelte $R^i = R$.

Induktionsschritt: Wir berechnen R^{i+1}:

$R^{i+1} = R^i \circ R = R \circ R$ nach Induktionsvoraussetzung.

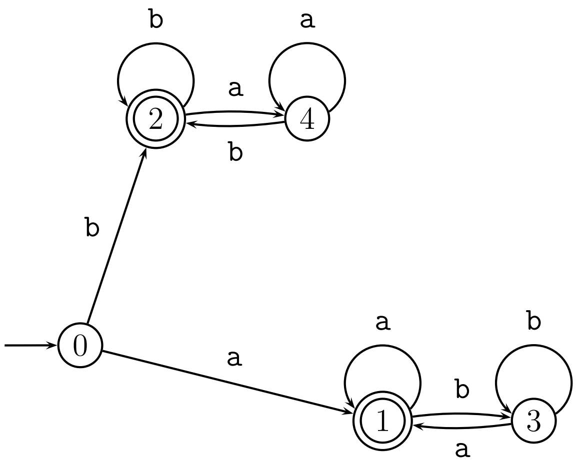
Andererseits gilt $R \circ R = R$ nach Teilaufgabe a).

Somit folgt $R^{i+1} = R$, wie zu zeigen war.

Da R eine Äquivalenzrelation und damit reflexiv ist, muss $R^0 = \{(x, x) \mid x \in M\} \subseteq R$ gelten.

Es folgt: $R^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} R^i = R^0 \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = R^0 \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} R = R^0 \cup R = R$, da $R^0 \subseteq R$ gilt.

Aufgabe 39



Aufgabe 40

$A = (Z_1 \times Z_2, (z_01, z_02), X, f, F_1 \times F_2)$ mit
$f : (Z_1 \times Z_2) \times X \to Z_1 \times Z_2$
$((z_1, z_2), x) \mapsto (f_1(z_1, x), f_2(z_2, x))$.
Idee: Die beiden Automaten laufen pparallelnneben einander her; ein Wort wird genau dann akzeptiert, wenn beide Automaten in einem akzeptierenden Endzustand aufhören.

Aufgabe 41

1. $(\mathtt{a} \mid \mathtt{b})(\mathtt{aa} \mid \mathtt{ab} \mid \mathtt{ba} \mid \mathtt{bb})*$ oder $(\mathtt{a} \mid \mathtt{b})((\mathtt{a} \mid \mathtt{b})(\mathtt{a} \mid \mathtt{b}))*$
2. $(\mathtt{a}((\mathtt{a} \mid \mathtt{b})(\mathtt{a} \mid \mathtt{b})) * \mathtt{b}) \mid (\mathtt{b}((\mathtt{a} \mid \mathtt{b})(\mathtt{a} \mid \mathtt{b})) * \mathtt{a})$
3. $(\mathtt{a} \mid \mathtt{b}) * \mathtt{ba}(\mathtt{a} \mid \mathtt{b})*$
4. $(\mathtt{b} * \mathtt{aa} * \mathtt{bb}) * (\mathtt{b}* \mid \mathtt{b} * \mathtt{aa}* \mid \mathtt{b} * \mathtt{aa} * \mathtt{b})$

Aufgabe 42

a) $\bar{\mathtt{a}}\mathtt{a}\bar{\mathtt{a}}\mathtt{b}\bar{\mathtt{b}}\mathtt{a}\bar{\mathtt{b}}\mathtt{a}\bar{\mathtt{a}}$

b) $\mathtt{\bar{a}a\bar{a}b\bar{b}a\bar{b}\bar{a}a}$
$\mathtt{\bar{a}a\bar{a}b\bar{b}\bar{a}\bar{b}aa}$
$\mathtt{\bar{a}a\bar{a}\bar{b}\bar{b}\bar{a}baa}$
$\mathtt{\bar{a}\bar{a}\bar{a}\bar{b}\bar{b}abaa}$

c) `aaabmabaa`

d) $\mathtt{\bar{a}a\bar{b}a}$ (Hinweis: Kurzzeitig stand fälschicherweise `aaaba` in der Aufgabenstellung.)

e) $w_1\mathtt{m}w_2$