Lösungen zu den Weihnachtsaufgaben

Aufgabe 1

Die Wahrheitswerte von $A \Rightarrow \neg B$ und $B \Rightarrow \neg A$ sind immer gleich.
Dies kann man anhand einer Tabelle für die Wahrheitswerte sehen:

A	B	$A \Rightarrow \neg B$	$B \Rightarrow \neg A$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

Aufgabe 2

a) Nach Definition gilt:

$f(\texttt{abbab}) = \texttt{aa}f(\texttt{bbab}) = \texttt{aabb}f(\texttt{bab}) = \texttt{aabbbb}f(\texttt{ab}) = \texttt{aabbbbaa}f(\texttt{b}) = \texttt{aabbbbaabb}f(\epsilon) = \texttt{aabbbbaabb}$.

b) Induktionsanfang: $n = 0$: Dann ist $w = \epsilon$ und es gilt

$|f(w)| = |f(\epsilon)| = |\epsilon| = 0 = 2 \cdot 0 = 2|\epsilon| = 2|w|$.

Induktionsannahme: Für beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$\forall w \in A^n : |f(w)| = 2|w|$.

Induktionsschritt: Es sei $w \in A^{n+1}$. Dann gibt es $w' \in A^n$ und $x \in A$, so dass $w = xw'$ gilt.

Es folgt: $|f(w)| = |f(xw')| = |xxf(w')| = 2 + |f(w')|$

Nach Induktionsannahme gilt $|f(w')| = 2|w'|$, und es folgt:

$|f(w)| = 2 + |f(w')| = 2 + 2|w'| = 2(1 + |w'|) = 2|xw'| = 2|w|$.

Damit ist die Behauptung gezeigt.

c) f verdoppelt jedes Zeichen des Wortes.

Aufgabe 3

a) $F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1$
$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$
$F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$
$F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$
$F_6 = F_5 + F_4 = 5 + 3 = 8$

b) Wir zeigen durch Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

$$\text{und} \qquad F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$$

Induktionsanfang $n = 0$: Es gilt $\frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^0 - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^0) = \frac{1}{\sqrt{5}}(1-1) = 0 = F_0$ und $\frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^1 - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^1) = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{2\sqrt{5}}{2} = 1 = F_1$.

Induktionsschritt: Induktionsannahme: Für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}_0$ gelte

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

$$\text{und} \qquad F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$$

Induktionsschritt: Ganz am Ende benutzen wir $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n} \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n} \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 \right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1 \right) \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n} \right) \\
&= F_{n+1} + F_n \\
&= F_{n+2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

a) $L_1 = \{\mathtt{aa}, \mathtt{ab}, \mathtt{ba}, \mathtt{bb}\}$,

$L_2 =$
$\{\mathtt{aaaa}, \mathtt{aaab}, \mathtt{aaba}, \mathtt{aabb},$
$\mathtt{abaa}, \mathtt{abab}, \mathtt{abba}, \mathtt{abbb},$
$\mathtt{baaa}, \mathtt{baab}, \mathtt{baba}, \mathtt{babb},$
$\mathtt{bbaa}, \mathtt{bbab}, \mathtt{bbba}, \mathtt{bbbb}\}$.

b) $L_n = A^{2^n}$.

Aufgabe 5

Alle Wörter liegen in L^*. Im folgenden werden beispielhaft Unterteilungen angegeben.

a) `aaabbb` $\in L$

b) `bbb aaa` oder `bb ba aa`

c) `aaba aaba`

d) `ba aaaba`

e) `aababbb` $\in L$

f) `bababa` $\in L$

Man könnte aber auch immer die triviale Unterteilung in lauter einzelne Buchstaben hinschreiben, dann es gilt sowohl $\mathtt{a} \in L$ als auch $\mathtt{b} \in L$.

Aufgabe 6

Jedes Wort $w \in L$ enthält das Teilwort `ab` oder das Teilwort `ba`; somit enthält jedes Wort $w \in L$ mindestens ein `a` und mindestens ein `b`.
Sei w ein Wort, das mindestens ein `a` und mindestens ein `b` enthält.

1. Fall: w beginnt mit `a`.

Sei i die erste Stelle, an der in w ein `b` steht, für das also gilt: $w(i) = \mathtt{b}$. Da w mindestens ein `b` enthält, muss es ein solches $i \geq 1$ geben.

Dann muss $w(i-1) = \mathtt{a}$ gelten, und w enthält das Teilwort $a\mathtt{b}$, was bedeutet, dass sich w schreiben lässt als $w_1\mathtt{ab}w_2$ mit $w_1, w_2 \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$.

Somit liegt w in L.

2. Fall: w beginnt mit `b`.

Indem man in obiger Begründung die Zeichen `a` und `b` vertauscht, erhält man:

Es gibt $w_1, w_2 \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$, so dass $w = w_1\mathtt{ba}w_2$ gilt und somit $w \in L$ gilt.

Aufgabe 7

a) $N = \{S, X\}, P = \{S \to X\mathtt{ab}X \mid X\mathtt{ba}X, X \to XX \mid \mathtt{a} \mid \mathtt{b} \mid \epsilon\}$.

b) $S \Rightarrow X\mathtt{ba}X \Rightarrow \mathtt{ba}X \Rightarrow \mathtt{ba}XX \Rightarrow \mathtt{ba}XXX \Rightarrow \mathtt{ba}XX\mathtt{b} \Rightarrow \mathtt{ba}X\mathtt{ab} \Rightarrow \mathtt{baaab}$.

Aufgabe 8

a) $S \Rightarrow \mathtt{[}S\mathtt{]}S \Rightarrow \mathtt{[}S\mathtt{]}\,\mathtt{[}S\mathtt{]}S \Rightarrow \mathtt{[}S\mathtt{]}\,\mathtt{[}S\mathtt{]} \Rightarrow \mathtt{[}S\mathtt{]}\,\mathtt{[]} \Rightarrow \mathtt{[]}\,\mathtt{[]}$.

$S \Rightarrow \mathtt{[}S\mathtt{]}S \Rightarrow \mathtt{[[}S\mathtt{]}S\mathtt{]}S \Rightarrow \mathtt{[[]}S\mathtt{]}S \Rightarrow \mathtt{[[]]}S \Rightarrow \mathtt{[[]]}$.

b) In $L(G)$ sind genau die korrekten Klammerausdrücke mit eckigen Klammern enthalten.

c) **Achtung:** Lassen Sie sich nicht dadurch verwirren, dass im folgenden der Doppelpfeil $\Rightarrow$ in zwei Bedeutungen vorkommt: als Ableitungspfeil bei Grammatiken und zur Notation logischer Implikation.

Sei $w \in \{\mathtt{[}, \mathtt{]}, S\}^*$.

Wir zeigen per Induktion: $\forall n \in \mathbb{N}_0 : (S \Rightarrow^n w) \Rightarrow N_{\mathtt{[}}(w) = N_{\mathtt{]}}(w)$.

Induktionsanfang: $n = 0$: $S \Rightarrow^0 w$; dann ist $w = S$, also $N_{\mathtt{[}}(w) = N_{\mathtt{]}}(w) = 0$.

Induktionsannahme: Für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}_0$ gelte: $\forall w \in \{\mathtt{[}, \mathtt{]}, S\}^* : (S \Rightarrow^n w) \Rightarrow N_{\mathtt{[}}(w) = N_{\mathtt{]}}(w)$.

Induktionsschritt: Es gelte $S \Rightarrow^{n+1} w$.

Dann gibt es ein $w' = w_1Sw_2$ mit $w_1, w_2 \in \{\mathtt{[}, \mathtt{]}, S\}^*$, so dass gilt:

$S \Rightarrow^n w_1Sw_2 \Rightarrow w$ und $w \in \{w_1w_2, w_1\mathtt{[}S\mathtt{]}Sw_2\}$.

Es gilt nun nach Induktionsvoraussetzung $N_{\mathtt{[}}(w') = N_{\mathtt{]}}(w')$ und damit $N_{\mathtt{[}}(w_1) + N_{\mathtt{[}}(w_2) = N_{\mathtt{]}}(w_1) + N_{\mathtt{]}}(w_2)$.

Es folgt $N_{\mathtt{[}}(w_1w_2) = N_{\mathtt{[}}(w_1) + N_{\mathtt{[}}(w_2) = N_{\mathtt{]}}(w_1) + N_{\mathtt{]}}(w_2) = N_{\mathtt{]}}(w_1w_2)$ und $N_{\mathtt{[}}(w_1\mathtt{[}S\mathtt{]}Sw_2) = N_{\mathtt{[}}(w_1)+1+N_{\mathtt{[}}(w_2) = N_{\mathtt{]}}(w_1)+1+N_{\mathtt{]}}(w_2) = N_{\mathtt{]}}(w_1\mathtt{[}S\mathtt{]}Sw_2)$.

In jedem Fall gilt für w: $N_{\texttt{[}}(w) = N_{\texttt{]}}(w)$.

Damit ist die Behauptung der Induktion gezeigt.

Da $\forall w \in L(G) : S \Rightarrow^* w$ gilt, folgt die zu zeigende Behauptung.

Aufgabe 9

`1011001`

a)

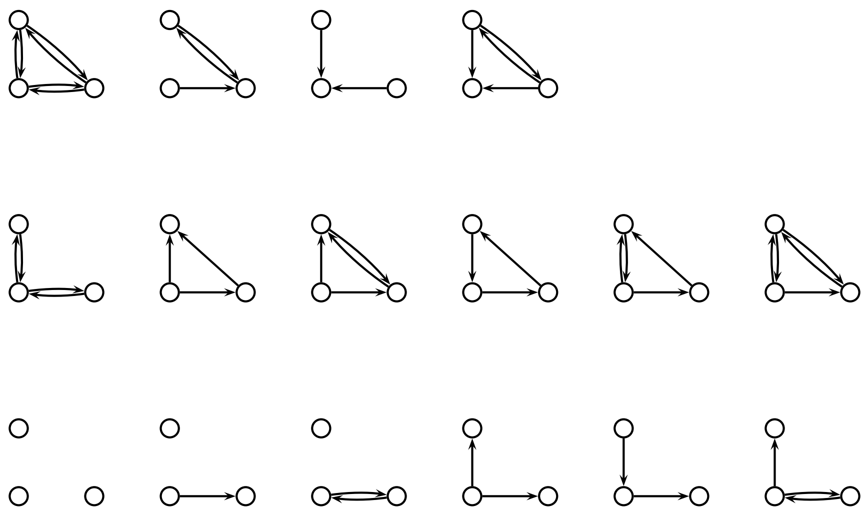
`cbbaab`

b)

c) Nein, es gibt kein solches Wort. Würde das Wort mit `a` beginnen, wäre das erste Zeichen der Codierung ungleich `0`; würde das Wort mit `b` beginnen, wäre das zweite Zeichen der Codierung ungleich `0`; Würde das Wort mit `c` beginnen, wäre das dritte Zeichen der Codierung ungleich `0`. Damit kann keines der drei möglichen Zeichen das erste Zeichen der Codierung sein, und es gibt kein Wort $w \in \{\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}\}^*$, für das $C(w) = \texttt{000100001}$ gilt.

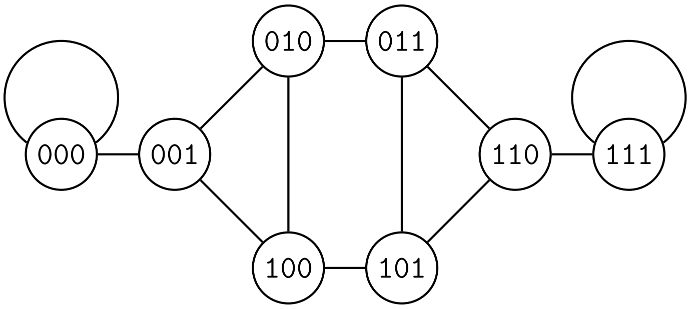
d) $C'(\texttt{a}) = \texttt{1}, C'(\texttt{b}) = \texttt{01}, C'(\texttt{c}) = \texttt{00}$

Aufgabe 10



Aufgabe 11

a)



b) $(\texttt{000}, \texttt{001}, \texttt{010}, \texttt{100}, \texttt{101}, \texttt{011}, \texttt{110}, \texttt{111})$

c) $$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix}0&1&2&3&4&5&6&7\end{matrix}\\ \hline \begin{matrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\end{matrix} & \begin{pmatrix}1&1&0&0&0&0&0&0\\1&0&1&0&1&0&0&0\\0&1&0&1&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&1&1&0\\0&1&1&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&1&0&1&0\\0&0&0&1&0&1&0&1\\0&0&0&0&0&0&1&1\end{pmatrix}\end{array}.$$

Aufgabe 12

a) **Achtung:** Lassen Sie sich nicht schrecken. Wundern Sie sich nicht. Dieser Beweis war schwer.

Angenommen, es gibt einen zusammenhängenden ungerichteten Graphen mit n Knoten und weniger als $n-1$ Kanten. Sei $G = (V, E)$ so ein zusammenhängender Graph mit einer minimalen Anzahl n von Knoten (das heißt, für jeden zusammenhängenden Graphen mit k Knoten und weniger als $k-1$ Kanten ist $k \geq n$).

Da ein Graph mit zwei Knoten und keinen Kanten nicht zusammenhängend ist, muss $n \geq 3$ gelten.

Wir wählen $v \in V$ definieren $G' = (V \setminus \{v\}, E')$ mit $E' = \{(v_1, v_2) \mid (v_1, v_2) \in E \wedge v_1, v_2 \in V \setminus \{v\}\}$.

Es gibt nun ein $k \in \mathbb{N}_+$, so dass wir k zusammenhängende Teilgraphen $G_1 = (V_1, E_1), \ldots, G_k = (V_k, E_k)$ von G' finden können, für die gilt:
$\bigcup_{i=1}^{k} V_i = V \setminus \{v\}$ und
$\bigcup_{i=1}^{k} E_i = E'$ und
$\forall i, j \in \{1, \ldots, k\} \forall v_1 \in V_i \forall v_2 \in V_j$: Es gibt einen Pfad von v_1 nach $v_2 \Rightarrow i = j$.

Da für $1 \leq i \leq k$ gilt $|V_i| < n$, gilt für $1 \leq i \leq k$: $|E_i| \geq |V_i| - 1$, da n die kleinste Zahl war, für die es zusammenhängende Graphen mit n Knoten und weniger als $n-1$ Kanten gibt.

Damit von v aus in G jeder Knoten aus erreichbar ist (was aus der Tatsache folgt, dass G zusammenhängend ist), muss es für $1 \leq i \leq k$ jeweils mindestens einen Knoten $v_i \in V_i$ geben, für den $(v, v_i) \in E$ gilt; es muss also mindestens k Kanten geben, die in $E \setminus E'$ liegen.

Abzählen ergibt: $|E| \geq k + \sum_{i=1}^{k}(|V_i| - 1) = \sum_{i=1}^{k} |V_i| = |V| - 1 = n - 1$ im Widerspruch zur Annahme.

Also muss jeder zusammenhängende ungerichtete Graph mit n Knoten mindestens $n-1$ Kanten besitzen.

b) Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $n \geq 2$ ist der Graph
$G_n = (\{0, 1, \ldots, n-1\}, \{\ \{i, i+1\} \mid 0 \leq i \leq n-2\})$ zusammenhängend und enthält n Knoten und $n-1$ Kanten.

Aufgabe 13

a) Sei $n \geq 9$. Dann gilt:

$n^5 + 9n^3 \leq n^5 + n^4 \leq n^5 + n \cdot n^4 \leq 2n^5 < 8n^5 = 9n^5 - n^5 \leq n^6 - n^5 \leq n^6 - 9n^4$.

Es folgt: $\forall n \geq 9 : n^5 + 9n^3 \leq 1 \cdot (n^6 - 9n^4)$ und somit gilt $n^5 + 9n^3 \in O(n^6 - 9n^4)$.

b) $2^n \in O(3^n)$. $3^n \notin O(2^n)$.

c) $2^n \in O(2^{2n})$. $2^{2n} \notin O(2^n)$.

Aufgabe 14

Man zeigt z.B. die beiden Inklusionen:

- Sei $g \in \Theta(f)$. Dann gilt nach Definition:

  $\exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+ : \forall n \geq n_0 : c_1 f(n) \leq g(n) \leq c_2 f(n)$.

  Es folgt $\exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \exists c_1 \in \mathbb{R}_+ : \forall n \geq n_0 : g(n) \geq c_1 f(n) \Rightarrow g \in \Omega(f)$ und $\exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \exists c_2 \in \mathbb{R}_+ : \forall n \geq n_0 : g(n) \leq c_2 f(n) \Rightarrow g \in O(f)$.

  Damit gilt $g \in O(f) \cap \Omega(f)$ und es folgt $\Theta(f) \subseteq O(f) \cap \Omega(f)$.

- Sei $g \in O(f) \cap \Omega(f)$.

  Dann gibt es nach Definition $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0$ und $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+$, so dass gilt: $\forall n \geq n_1 : g(n) \geq c_1 f(n)$ und $\forall n \geq n_2 : g(n) \leq c_2 f(n)$.

  Sei n_0 nun die größere der Zahlen n_1, n_2.

  Dann gilt auch $\forall n \geq n_0 : g(n) \geq c_1 f(n)$ und $\forall n \geq n_0 : g(n) \leq c_2 f(n)$.

  Somit gilt: $\exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+ : \forall n \geq n_0 : c_1 f(n) \leq g(n) \leq c_2 f(n)$.

  Somit gilt $g \in \Theta(f)$ und es folgt $O(f) \cap \Omega(f) \subseteq \Theta(f)$.

Also gilt insgesamt $O(f) \cap \Omega(f) = \Theta(f)$.