Grundbegriffe der Informatik

Aufgaben, wie sie vielleicht in einer Klausur dran kommen könnten

Die nachfolgenden Aufgaben sind Variationen einiger schon gestellter Übungsaufgaben, wie sie so oder so ähnlich, evtl. in vereinfachter Form, in der Klausur dran kommen könnten.
Achtung: *Aus der Tatsache, dass gewisse Aufgabentypen oder Themen im folgenden nicht abgedeckt werden, darf man nicht schließen, dass Entsprechendes auch nicht in der Klausur dran kommen kann.*
Noch mal Achtung: *Die Anzahl der nachfolgend aufgeführten Aufgaben hat nichts mit der Anzahl Aufgaben in der Klausur zu tun.*

Aufgabe Ü.1 (1+2 Punkte)
Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Wahrheitswerten der beiden aussagenlogischen Formeln $A \Rightarrow \neg B$ und $B \Rightarrow \neg A$? Erläutern Sie, wie man sich das klar machen kann.

Aufgabe Ü.2 (1+3+1 Punkte)
Es sei A ein Alphabet. Die Abbildung $f : A^* \to A^*$ sei wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} f(\varepsilon) &= \varepsilon \\ \forall w \in A^* \; \forall x \in A: \; f(xw) &= xxf(w) \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie $f(\texttt{abbab})$.
b) Beweisen Sie: $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \forall w \in A^n : \; |f(w)| = 2|w|$.
c) Geben Sie eine umgangssprachliche Beschreibung dessen, was die Abbildung f macht.

Aufgabe Ü.3 (1+3 Punkte)
Eine Folge $F_0, F_1, \ldots$ nichtnegativer ganzer Zahlen sei wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} F_0 &= 0 \\ F_1 &= 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}_0 : \; F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie F_6 durch mehrfaches Anwenden der Rekursionsformel. Geben Sie bitte alle Zwischenschritte an.
b) Beweisen Sie:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \; F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Aufgabe Ü.4 (1+1 Punkte)
Es sei $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. Eine Folge L_0, L_1, … von Mengen von Wörtern aus A^* sei wie folgt definiert:

$$L_0 = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$$
$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \ L_{n+1} = L_n L_n$$

a) Geben Sie explizit an, welche Wörter in L_1 und L_2 jeweils sind.
b) Geben Sie (ohne Nachweis der Korrektheit) für beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$ eine explizite Formel (in der nicht irgendwelche L_i vorkommen) für L_n an.

Aufgabe Ü.5 (1+1+1+1+1+1 Punkte)
Es sei $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. Die Sprache $L \subseteq A^*$ sei definiert durch $L = \{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{ba}\}^*\{\mathtt{b}\}^*$.
Welche der folgenden Wörter sind in der formalen Sprache L^* enthalten? Geben Sie für jedes Wort w, das in L^* liegt, eine Zerlegung in Wörter $w_1, \ldots, w_k$ aus L an, so dass $w = w_1 \cdots w_k$ gilt.

a) `aaabbb`
b) `bbbaaa`
c) `aabaaaba`
d) `baaaaba`
e) `aababbbb`
f) `bababa`

Aufgabe Ü.6 (3 Punkte)
Es sei $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. Begründen Sie, warum die Sprache $L \subseteq A^*$ mit

$$L = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \left(\{\mathtt{ab}\} \cup \{\mathtt{ba}\}\right) \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$$

genau die Wörter enthält, in denen mindestens ein `a` und mindestens ein `b` vorkommt.

Aufgabe Ü.7 (3+1 Punkte)
a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik $G = (N, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, S, P)$ an, für die $L(G) = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \left(\{\mathtt{ab}\} \cup \{\mathtt{ba}\}\right) \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$ ist.
b) Geben Sie eine Ableitung des Wortes `baaab` aus dem Startsymbol Ihrer Grammatik an.

Aufgabe Ü.8 (2+2+3 Punkte)
Gegeben sei die kontextfreie Grammatik $G = (\{S\}, \{\mathtt{[}, \mathtt{]}\}, S, P)$ mit der Produktionenmenge $P = \{S \to \mathtt{[}S\mathtt{]}S \mid \varepsilon\}$.

a) Geben Sie Ableitungen der Wörter `[][]` und `[[]]` in G an.

b) Beschreiben Sie prägnant, welchen Wörter in $L(G)$ enthalten sind.
c) Beweisen Sie, dass für jedes Wort in $w \in L(G)$ gilt: $N_{\texttt{[}}(w) = N_{\texttt{]}}(w)$.

Aufgabe Ü.9 (1+1+2+2 Punkte)
Gegeben sei ein Code $C : \{\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}\} \to \{0, 1\}^*$ mit $C(\texttt{a}) = \texttt{1}$, $C(\texttt{b}) = \texttt{01}$ und $C(\texttt{c}) = \texttt{001}$.

a) Codieren Sie das Wort `abac`.
b) Decodieren Sie das Wort `00101011101`.
c) Gibt es ein Wort $w \in \{\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}\}^*$ mit $C(w) = \texttt{000100001}$ codiert wird? Begründen Sie Ihre Antwort.
d) Geben Sie eine Codierung C' an, so dass für alle $w \in \{\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}\}^*$ gilt: $C'(w)| \leq |C(w)|$ und für unendlich viele Wörter $C'(w)| < |C(w)|$.

Aufgabe Ü.10 (7 Punkte)
Zeichnen Sie alle möglichen gerichteten schlingenfreien Graphen mit genau drei Knoten, von denen keine zwei isomoprh sind.

Aufgabe Ü.11 (2+1+2 Punkte)
Gegeben sei der Graph $G = (V, E)$ mit $V = \{\texttt{0}, \texttt{1}\}^3$ und

$$\begin{aligned} E = &\{\{xw, wx\} \mid x \in \{\texttt{0}, \texttt{1}\} \wedge w \in \{\texttt{0}, \texttt{1}\}^2\} \\ &\cup \{\{wx, wy\} \mid x, y \in \{\texttt{0}, \texttt{1}\} \wedge x \neq y \wedge w \in \{\texttt{0}, \texttt{1}\}^2\} \end{aligned}$$

a) Zeichnen Sie G.
b) Geben Sie einen Weg in G an, der jeden Knoten von G genau einmal enthält.
c) Geben Sie die Adjazenzmatrix von G an. Wählen Sie dabei als Zeilen- bzw. Spaltennummer eines Knotens $v \in \{\texttt{0}, \texttt{1}\}^3$ gerade $\mathrm{Num}_2(v)$.

Aufgabe Ü.12 (2+2 Punkte)
Sei $G = (V, E)$ mit $|V| \geq 2$ ein zusammenhängender ungerichteter Graph.

a) Begründen Sie, warum G mindestens $n - 1$ Kanten enthält.
b) Zeigen Sie, dass es für jedes $n \geq 2$ einen zusammenhängenden ungerichteten Graphen mit n Knoten und $n - 1$ Kanten gibt.

Aufgabe Ü.13 (2+2+2 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass $n^5 + 9n^3$ in $O(n^6 - 9n^4)$ liegt.
b) Liegt 2^n in $\mathrm{O}(3^n)$? Liegt 3^n in $\mathrm{O}(2^n)$?
c) Liegt 2^n in $\mathrm{O}(2^{2n})$? Liegt 2^{2n} in $\mathrm{O}(2^n)$?

Aufgabe Ü.14 (3 Punkte)
Beweisen Sie, dass für alle Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ gilt: $\Theta(f) = O(f) \cap \Omega(f)$.